Axiom (Ersetzung)

$$\forall y, \bar{w}\ (\forall u\ \exists! z\ \phi(u,z,\bar{w}) \to \exists x\ \forall z\ (z \in x \leftrightarrow \exists u (u \in y \wedge \phi(u,z,\bar{w}))$$

$\bar{w}$ = Tupel von Variablen

$\exists!\ \phi(x)$ Abkürzung für $\exists x\ (\phi(x) \wedge \forall y (\phi(y) \to x = y)$

lese als 'es gibt genau ein x...'

Beispiele (Anwendung Ersetzungsaxiom)

- Zeige Existenz von $a \times b$ ohne Potenzmengenaxiom
  Halte x fest. Dann gilt
  $ZFC \vdash \forall u\ \exists! z\ \ z \doteq (x,u)$
  $\Rightarrow$ für eine Menge b ~~existiert~~ ist auch
  $\{(x,u) : u \in b\}$ eine Menge.
  $" \{x\} \times b$
  $ZFC \vdash \forall x\ \exists! z\ \ z = \{(x,u) : u \in b\}$
  Nochmal Ersetzungsaxiom
  $\Rightarrow C = \{\{x\} \times b : x \in a\}$ ist Menge
  Nun gilt $a \times b = \bigcup C = \bigcup\{\{(x,y) \mid y \in b\} \mid x \in a\}$.
  $= \{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in b\}$
- Sei R Relation, dann ist auch
  $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ eine Menge.

Def: Eine Funktion $f : a \to b$ heißt

- surjektiv, falls $Im(f) = b$ gilt ← Eigenschaft von f & b, nicht nur von f!
- injektiv, wenn f^{-1} eine Fkt ist
- bijektiv, wenn f inj. & surjektiv ist.

Exkurs - definitorische Erweiterungen

Motivation: Mittels der Axiome lassen sich neue Fkt./Relationen definieren. (etwa R^{-1} für eine Relation R)

Bsp: $x \subset y$ war def. als $\forall z\ z \in x \to z \in y$

1. Auffassung '$\subset$' ist eine Abkürzung.

2. Auffassung $L_{Me\subset} = L_{Me} \cup \{\subset\}$

$ZFC' = ZFC \cup \{ \forall x,y\ \ x \subset y \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \to z \in y)) \}$

Es gilt

(i) jede L_{Me} - Aussage, die in ZFC' beweisbar ist, ist auch in ZFC beweisbar

Bew: Jedes Modell von ZFC lässt sich eind. zu einem Modell von ZFC' expandieren ☑ mit 1.18 Vollst.keit

d.h. ZFC' ist eine konservative Erweiterung von ZFC

(ii) jede $L_{Me\subset}$ - Fml ist in ZFC' äquivalent zu einer L_{Me} - Formel

Bew: Ersetze in $\phi'(x_1,..,x_n)$ jedes Vorkommen von "$\subset$" durch seine Definition

(eventuell muss man die gebundene Var. z umbennen:

$z \subset x \leadsto \forall z'\ z' \in z \to z' \in x$

Folgerung: In ZFC' gelten alle Axiome und Axiomenschemata auch, wenn man das neue Zeichen '$\subset$' zulässt.

Weitere Bsp: "$f: x \to y$" "f ist Funktion"

Bsp: $y = P(x)$

Hier ist die zweite Auffassung nötig

$$ZFC \vdash \forall x\, \exists y\, \underbrace{\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)}_{\varphi(x,y)}$$

informell: ZFC beweist "$\varphi(x,y)$ ist ein Funktional"

Funktional: Def.bereich keine Menge

$L_{MeP} = L_{Me} \cup \{P\}$

$ZFC' = ZFC \cup \{\forall x\ \varphi(x, P(x))\}$

Bem: Sei T L-Theorie, $\phi(x_1,..,x_n)$ L-Formel. Wenn wir für ϕ ein neues (n-stelliges) Relationszeichen R_ϕ einführen, erweitern wir L zu $L' = L \cup \{R_\phi\}$ und T zu $T' = T \cup \{\forall x_1,..,x_n\ R(x_1,..,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,..,x_n)\}$. Dann ist T' eine konservative Erweiterung von T, und jede L'-Fml ist T'-beweisbar äquivalent zu einer L-Fml. (gleicher Bew. wie im Bsp.)

Satz 2.4: Sei T L-Theorie, $\phi(x_0,..,x_n)$ L-Fml mit

$T \vdash \forall x_1,..,x_n\ \exists!\, x_0\ \phi(x_0,..,x_n)$ "ϕ ist beweisbar funktional"

Sei f_ϕ ein neues n-stelliges Fktsymbol und $L' = L \cup \{f_\phi\}$. Dann ist die L'-Theorie

$$T' = T \cup \{\forall x_1,..,x_n\ \phi(f(x_1,..,x_n), x_1,..,x_n)\}$$

eine konservative Erweiterung von T. Darüber hinaus ex. für jede L'-Fml ψ eine L-Fml $\tilde{\psi}$ mit $T' \vdash \psi \leftrightarrow \tilde{\psi}$.

Bem: Solche Erweiterungen wie in 2.4 und der Bemerkung davor heißen definitorisch.

Bew von 2.4:

Konservativ: Sei $\mathfrak{A} \models T$. Dann lässt sich $\mathfrak{A}$ eind. zu einem Modell von T' fortsetzen (interpretiere f_ϕ als die Fkt. die $a_1, \dots, a_n$ das a_0 zuordnet mit $\mathfrak{A} \models \phi(a_0, \dots, a_n)$)

Die Übersetzung $\tilde{\psi}$ definiert man rekursiv über den Aufbau von ψ. Nur bei Primformeln ($t_1 = t_2$, $R(t_1, \dots, t_n)$) gibt es was zu tun!

Sei also etwa $\psi = R(t_1, \dots, t_n)$, ang. f kommt in t_1 vor. Schreibe $t_1 = s_0(f(s_1, \dots, s_n))$ für L-Terme $s_0, \dots, s_n$ und setze

$$\tilde{\psi} = \exists x_0 (\phi(x_0, s_1, \dots, s_n) \wedge \widetilde{R(s_0(x_0), t_1, \dots, t_n)}) \boxtimes$$

Bem: Falls $n = 0$ in Satz 2.4, führen wir eine neue Konstante ein (macht auch Sinn).

Bsp: $P(x)$, $\bigcup x$, $x \cup y$, $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\emptyset$ definiert durch $\varphi(x_0) = \forall z \neg z \in x_0$

Korollar 2.5: Aussonderungs- und Ersetzungsaxiom bleiben gültig, wenn ϕ neu eingeführte Relationszeichen, Fkt.zeichen und Konstanten enthält.

Nun zurück zu den Axiomen!

Noch fehlen: Fundierung, Unendlichkeit, Auswahl.

Intuition (keine formale Definition!): Eine Menge x heißt fundiert, wenn jede bei x anfangende $\in$-Kette $x \ni y_0 \ni y_1 \ni \dots$ nach endl. vielen Schritten abbricht.

Axiom (Fundierung): $\forall x (\neg x \doteq \emptyset \to \exists z \in x \; z \cap x \doteq \emptyset)$

Informell: x nicht fundiert $\Rightarrow$ jedes Element $z \in x$ hat Element $y \in z$ mit $y \in x$
(mit dem Auswahlaxiom) $\rightsquigarrow$ erhalte unendl. $\in$-Kette

Folgerung 2.6 (ZFC): Eine Menge kann sich nicht selbst als Element enthalten
$\rightsquigarrow$ weiterer Beweis für: V keine Menge.

Rechtfertigung fürs Fundierungsaxiom:
(1.) Unheimliche Mengen $x = \{x\}$ ausgeschlossen
(2.) $(M, E) \models ZFC \setminus \{\text{Fundierung}\}$
$N = \{m \in M : (M, E) \models \text{`m ist fundiert'}\}$
$\Rightarrow (N, E\restriction_{N^2}) \models ZCF$
"fundierte Mengen sind eh immer da"
(3.) $(M, E) \models ZFC \setminus \{\text{Fundierung}\}$
Dann gilt
$(M, E) \models$ `für jedes x ex. fundiertes m und Bijektion $f : x \to m$'
Also: Brauche nur fundierte Mengen, um Mathematik zu betreiben

Axiom (Unendlichkeit): $\exists x (\underbrace{\emptyset \in x}_{\exists x_0 (\forall y \, \neg y \in x_0) \land x_0 \in x} \land \forall z \in x \; z \cup \{z\} \in x)$

Axiom (Auswahl)
$\forall x (\neg \emptyset \in x \to \exists f : x \to V \; \forall z \in x \; f(z) \in z)$

§2.2 Die natürlichen Zahlen

Def: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere rekursiv

$\underline{n} = \{\underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{n-1}\}$

d.h. $\underline{0} = \{\} = \emptyset$

$\underline{1} = \{\emptyset\}$

$\underline{2} = \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\underline{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Definition: $s(x) = x \cup \{x\}$ (Nachfolger)

Nun, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $ZFC \vdash s(\underline{n}) = \underline{n+1}$

Also: jeder natürlichen Zahl ist eine Menge zugeordnet.

Wir müssen noch zeigen: $\{\underline{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Menge!

Idee: $\omega = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots\}$

Lemma 2.7: Falls $m < n$ gilt $ZFC \vdash \neg\, \underline{m} \doteq \underline{n}$

(Beweis: Metamathematische Induktion)

Folgerung 2.8: Für alle n, m gilt

$m < n \Rightarrow ZFC \vdash \underline{m} \in \underline{n}$

$m \geq n \Rightarrow ZFC \vdash \neg\, \underline{m} \in \underline{n}$

Def: Sei $<$ eine Relation auf a (d.h. Teilmenge von $a \times a$)

1. $<$ ist eine partielle Ordnung, wenn

   (O1) $<$ irreflexiv ist: $\neg x < x$ f.a. $x \in a$

   (O2) $<$ transitiv ist: $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ f.a. $x, y, z \in a$.

2. Eine partielle Ordnung $<$ auf a heißt linear, wenn

   f.a. $x, y \in a$ $\quad x < y \vee x \doteq y \vee y < z$ gilt.