Hinweis: pdf zu Zieglerbuch im WWU Netz frei verfügbar
(Springerlink)

Erinnerung: (Hilbertkalkül) L Sprache. L-Fml ist beweisbar, wenn sie

(B1) eine Tautologie ist,

(B2) ein Gleichheitsaxiom ist,

(B3) ein $\exists$-Quantorenaxiom ist, ϕ Fml, t Term, x frei für ein ϕ dann $\phi\frac{t}{x} \rightarrow \exists x \phi$ allgg

(B4) sich mittels Modus Ponens aus zwei beweisbaren Fmln ergibt, ϕ und $(\phi \rightarrow \psi)$ beweisbar, dann auch ψ.

(B5) sich mittels $\exists$-Einführung aus einer beweisbaren Fml ergibt. x nicht frei in ψ und $\psi \rightarrow \phi$ beweisbar, dann auch $\exists x \phi \rightarrow \psi$

Gödelscher Vollständigkeitssatz:

$$\models \phi \iff \vdash \phi$$

allgemeingültig: gilt in jeder L-Struktur mit jeder Belegung

beweisbar

Wichtigster Schritt

Satz 1.16: Eine L-Theorie hat genau dann ein Modell, wenn sie widerspruchsfrei ist.
(d.h. es gibt keine L-Aussagen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in T$ mit
$\vdash_L \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$)

Def: Sei T L-Theorie und ϕ L-Aussage.

(1.) ϕ ist in T beweisbar, schreibe $T \vdash \phi$, wenn es Axiome $\phi_1, \ldots, \phi_n$ aus T gibt, so dass $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \rightarrow \phi)$ beweisbar ist.

(2.) ϕ folgt logisch aus T, schreibe $T \models \phi$, wenn ϕ in allen Modellen von T gilt.

Folgerung 1.17: $T \vdash \phi \Leftrightarrow T \models \phi$

<u>Bew</u>: ϕ ist in T nicht beweisbar gdw. $T \cup \{\neg\phi\}$ widerspruchsfrei ist.
ϕ folgt genau dann nicht logisch aus T, wenn $T \cup \{\neg\phi\}$ ein Modell hat. ☑

Folgerung 1.18 (Kompaktheitssatz): Eine Theorie hat genau dann ein Modell, wenn jede endl. TM ein Modell hat.

Folgerung 1.19 (Löwenheim-Skolem) Sei L eine (höchstens) abzählbare Sprache und T eine L-Theorie.
Wenn T ein Modell hat, dann hat T auch ein höchstens abzählbares Modell.

Bew: Im Beweis von 1.16 wurde die Sprache L durch eine Konstantenmenge C erweitert. Zu jeder L-Fml. (davon gibt es abz. viele) wurde eine Konstante eingeführt. Dieser Prozess wurde abz. oft wiederholt. Also L abz. $\Rightarrow$ C abz.. Das im Beweis konstruierte Modell hat höchstens so viele Elemente wie C. ☑

§2 Mengenlehre.

§2.1 Die Axiome

Sprache der Mengenlehre $L_{Me} = \{\in\}$

Lese "$x \in y$" als "x ist Element von y".

Bisher: Menge = Menge im naiven Sinn, d.h.

(Extensionalität) · Mengen werden durch ihre Elem. eind. bestimmt

(Volle Komprehension) · Jede def.bare Klasse von Mengen ist eine Menge

Axiome der naiven Mengenlehre

Axiom (Extensionalität):

$$\forall x,y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \doteq y)$$

Axiom~~e~~ (Volle Komprehension): Für alle Formeln $\phi(z, y_1, \dots, y_n)$

$$\forall y_1, \dots y_n\, \exists x\, \forall z\, (z \in x \leftrightarrow \phi(z, y_1, \dots, y_n))$$

↑ (Axiomenschema)

Satz 2.1 (Betrand Russel, Russelsche Antinomie)

Die naive Mengenlehre ist inkonsistent. (nicht widerspruchsfrei)

Bew: Betrachte $\phi(x) = \neg x \in x$.

Komprehension liefert das Axiom

$$\exists x\, \forall z\, (z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$$

Sei also x die Menge mit $\forall z\,(z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$,

d.h. $x = \{z \mid \neg z \in z\}$

$$NM \vdash \overbrace{\exists x\,(x \in x \leftrightarrow \neg x \in x)}^{\text{hat kein Modell}}$$

Falls $x \in x$ folgt $\neg x \in x$

Falls $x \notin x$ folgt $x \in x$. ↯

▨

⇝ brauche 'neue' Axiome! Wir benutzen $\overset{\text{Zermelo}}{Z}\,\underset{\text{Fränkel}}{F}\,\overset{\text{choice = Auswahl}}{C}$

Liste der Axiome von ZFC

- Extensionalität
- Aussonderung
- Paarmenge
- Vereinigung
- Potenzmenge
- Ersetzung
- Fundierung
- Unendlichkeit
- Auswahl

$\left.\begin{array}{l}\text{Aussonderung}\\ \text{Paarmenge}\\ \text{Vereinigung}\\ \text{Potenzmenge}\end{array}\right\}$ Spezialfälle von volle Komprehension

Fundierung – informell: Es gibt keine unendl. absteigende Kette von Mengen, d.h. $y \ni y_1 \ni y_2 \ni \dots$

Unendlichkeit – informell: Es gibt eine unendl. Menge

Auswahl – informell: Sei E def.bare Äq.relation auf Menge x. Dann ist $\{[z]_E : z \in x\}$ auch eine Menge.

Axiom (Extensionalität) $\forall x,y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \doteq y)$

(x ist Teilmenge von y)

Schreibe $x \subset y$ als Abkürzung für $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$

Also ist Extensionalität gleichbedeutend mit $\forall x,y\,(x \subset y \wedge y \subset x) \rightarrow x \doteq y$

Axiom (Aussonderung) $\forall y_0 \ldots y_n\, \exists x\, \forall z (z \in x \leftrightarrow (z \in y_0 \wedge \phi(z, y_1, \ldots, y_n))$

für jede Fml. $\phi(z, y_1, \ldots, y_n)$

Mittels Aussonderungsaxiom sind für Mengen x, y auch

$x \cap y = \{z \in x \mid z \in y\}$ und

$x \setminus y = \{z \in x \mid \neg z \in y\}$ Mengen.

Falls es eine Menge x gibt, ist nun auch

$\emptyset = \{z \in x \mid \neg z \doteq z\}$ eine Menge

Bemerkung: Die Russelsche Antinomie ist nun ~~ein~~ in ZFC beweisbar:

$ZFC \vdash \neg \exists x\, \forall z\; z \in x$ (die Klasse V aller Mengen ist keine Menge)

Bew: Angenommen V Menge.

Dann gilt nach Aussonderung

$\{z \mid \neg z \in z\} = \{z \in V \mid \neg z \in z\}$

ist auch eine Menge. $\Rightarrow$ ZFC hat kein Modell.

Also ~~ZF~~ falls ZFC konsistent, gilt

$ZFC \vdash \neg \exists x\, \forall z\; z \in x$.

Falls ZFC inkonsistent ist, gilt

$ZFC \vdash \phi$ für alle L_{Me}-Aussagen ϕ. ☒

Axiom (Paarmenge)

$\forall y_1, y_2\, \exists x\, \forall z\; z \in x \leftrightarrow (z = y_1 \vee z = y_2)$.

Das Paarmengenaxiom sagt: x, y Mengen $\Rightarrow \{x, y\}$ Menge.

Definition: Seien x, y Mengen. Das geordnete Paar von x und y ist die Menge

$$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

(x,y) heißt Kuratowski Paar.

Lemma 2.2 $ZFC \vdash \forall x, y, x', y' \ (x,y) \doteq (x',y') \rightarrow x = x' \wedge y = y'$.

Axiom (Vereinigung): $\forall y \exists x \forall z \quad z \in x \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in y)$

Das Axiom fordert die Existenz von $\bigcup y = \{z \mid \exists w (z \in w \wedge w \in y)\}$

Bsp. $\bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\qquad \underset{\shortparallel}{\bigcup y}$

Informell: $y = \{A_i : i \in I\}$ $\quad \bigcup_{i \in I} A_i = \{z : \text{ex } i \in I \ z \in A_i\} = \{z : \text{ex } a \in y, z \in a\}$

Paarmengenaxiom & Vereinigungsaxiom: x, y Mengen, dann auch $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$.

Schreibweise: $\{y_1, \dots, y_n\} = \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \cup \{y_n\}$ (metamathematisch) rekursiv ~~induktiv~~

$= \{z \mid z = y_1 \vee \dots \vee z = y_n\}$

Axiom (Potenzmenge) $\forall y \exists x \forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \subset y)$.

Fordert die Existenz von $\mathcal{P}(y) = \{z \mid z \subset y\}$

Lemma (ZFC): Seien a, b Mengen. Dann ist auch

$$a \times b = \{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in b\}$$ eine Menge.

<u>Bew</u>: Sei $x \in a, y \in b. \Rightarrow \{x\}, \{x,y\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$

$\Rightarrow \{x, \{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$

$\Rightarrow \quad a \times b = \{(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) \mid x \in a \wedge y \in b\}$

Menge nach (Aussonderung) & (Potenzmenge) ☒

Definiere nun Tripel durch

$$(x,y,z) = ((x,y),z) \qquad \text{und}$$

$$a \times b \times c = \{(x,y,z) \mid x \in a \land y \in b \land z \in c\}$$

usw. Entsprechend Viertupel...

Definition: Eine Relation ist eine Menge von Paaren. Der Definitionsbereich ~~R~~ einer Relation R ist

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y \ (x,y) \in R\},$$

der Bildbereich

$$\mathrm{Im}(R) = \{y \mid \exists x \ (x,y) \in R\}$$

<u>Bem</u>: Definitions- und Bildbereich sind Mengen, weil sie aus $\bigcup\bigcup R$ ausgesondert werden können:

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \in R \Rightarrow \{x,y\} \in \bigcup R \Rightarrow x,y \in \bigcup\bigcup R$$

Def: Eine Funktion ist eine rechtseindeutige Relation

$$\forall x, y_1, y_2 \ (x,y_1) \in f \land (x,y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2$$

[informell: D.h. wir identifizieren eine Fkt. mit ihrem Graphen]

Schreibweisen: $f(x) = y$ für $(x,y) \in f$

(falls $x \notin \mathrm{dom}(f)$, setze $f(x) = \emptyset$)

$$f: a \rightarrow b$$

bedeutet $\mathrm{dom}(f) = a$ und $\mathrm{Im}(f) \subset b$.

Schreibe $f: a \rightarrow V$, wenn wir b nicht näher spezifizieren wollen.

$$f \restriction_c = f \cap (c \times b)$$

ist die Einschränkung von f auf eine Menge c.

$$f[c] = \{f(x) \mid x \in c\}$$

der Bildbereich von $f \restriction_c$.