7

Sprechweisen: · ϕ gilt in $\mathfrak{A}$
· ϕ ist wahr in $\mathfrak{A}$
· $\mathfrak{A}$ ist Modell von ϕ
· $\mathfrak{A}$ erfüllt ϕ
· $\mathfrak{A}$ glaubt ϕ.

Beispiel: Körperaxiome K1 - K10 sind L_{Ring}-Aussagen.
Eine L_{Ring}-Struktur $\mathfrak{K} = (K, 0^K, 1^K, +^K, -^K, \cdot^K)$ ist genau dann ein Körper, wenn in $\mathfrak{K}$ die Körperaxiome gelten.

Def: Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, wenn $\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi$ für alle L-Aussagen ϕ gilt.
Schreibe dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Übung: (i) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
(ii) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ endl. $\Rightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

Bsp: $(\mathbb{Q}^{alg}, \underline{0}^{\mathbb{Q}^{alg}}, \underline{1}^{\mathbb{Q}^{alg}}, +^{\mathbb{Q}^{alg}}, -^{\mathbb{Q}^{alg}}, \cdot^{\mathbb{Q}^{alg}}) \equiv (\mathbb{C}, \underline{0}^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}}, +^{\mathbb{C}}, -^{\mathbb{C}}, \cdot^{\mathbb{C}})$
(ohne Beweis)

Nun: Um das Hilbert-Kalkül einführen zu können, müssen wir Terme in Formel einsetzen können. Dazu folgendes (sehr technisches!) Konzept:
Sei x Variable, s ein Term, ϕ Fml.
$t\frac{s}{x}$ entsteht durch Ersetzen aller Vorkommen von x durch s
$\phi\frac{s}{x}$ -"- -"- freien -"-

Definiere $\phi \frac{s}{x}$ rekursiv:

(1.) $(t_1 \doteq t_2)\frac{s}{x} = t_1\frac{s}{x} \doteq t_2\frac{s}{x}$

(2.) $R t_1 \dots t_n \frac{s}{x} = R t_1\frac{s}{x} \dots t_n\frac{s}{x}$

(3.) $(\neg \psi)\frac{s}{x} = \neg(\psi\frac{s}{x})$

(4.) $(\psi_1 \wedge \psi_2)\frac{s}{x} = \psi_1\frac{s}{x} \wedge \psi_2\frac{s}{x}$

(5.) $(\exists y\, \psi)\frac{s}{x} = \begin{cases} \exists y\, \psi\frac{s}{x} & \text{wenn } y \neq x \\ \exists y\, \psi & \text{wenn } x = y \end{cases}$

~~[illegible]~~

Beispiel:
- $f(x,y)\frac{g(y)}{x} = f(g(y),y)$
- $(\exists y\, R(y, f(x)) \wedge \exists x\, S(x))\frac{g(y)}{x}$ — x nicht frei

x frei

$= \exists y\, R(y, f(g(y))) \wedge \exists x\, S(x)$

$(\exists x\, S(x))\frac{g(y)}{x} \neq \exists y\, S(g(y))$

$\exists x\, S(g(y))$

Def: x heißt frei für s in ϕ, wenn kein freies Vorkommen
(intuitiv) von x in ϕ im Wirkungsbereich eines Quantors ist, der eine Variable von s bindet.

Bsp:
- $\phi = \exists y\, R(y, f(x))$ x nicht frei für $g(y)$ in ϕ.
- $\varphi = \forall y\, (0 < x)$ "x ist größer als 0"

$s = y$ $\quad \phi\frac{s}{x} = \forall y\,(0 < y)$ "alle Elemente sind größer als 0"

Lemma 1.6 (Substitutionslemma) $\mathfrak{A}$ L-Struktur, t L-Term, ϕ L-Fml, β Belegung

(1.) $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$

(2.) Wenn x frei für s in ϕ, dann gilt

$$\mathfrak{A} \models \phi\frac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$$

(rekursiv) Def: x ist frei für s in ϕ, wenn x nicht frei in ϕ ist oder wenn x frei in ϕ ist und einer der folgenden Fälle zutrifft:

(1.) $\phi = t_1 \doteq t_2$

(2.) $\phi = R t_1 \dots t_n$

(3.) $\phi = \neg \psi$ und x ist frei für s in ψ

(4.) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ und x ist frei für s in ψ_1 und ψ_2

(5.) $\phi = \exists y \psi$ und x ist frei für s in ψ und y kommt in s nicht vor.

Bew. (Substitutionslemma)

1. Induktion über den Aufbau von t.

$b = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$

- $t = x \Rightarrow$ beide Seiten sind $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$

$$(t\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$$

- $t = y,\ y \neq x$

$$(t\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(y) = t^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$$

- $t = c$

$$(t\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$$

- $t = f t_1 \dots t_n$

$$(t\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}((t_1\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots (t_n\tfrac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}], \dots)$$

$$= t^{\mathfrak{A}}[\beta\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}].$$

2. Vorbemerkung: Wenn x nicht frei in ϕ ist gilt

$$\mathfrak{A} \models \phi\tfrac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta\tfrac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$$

nach Satz 1.5.

Nun: Induktion über den Aufbau von ϕ.

2.1. $\phi = t_1 \doteq t_2$

$$\mathfrak{A} \models \phi\tfrac{s}{x}[\beta] \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models (t_1\tfrac{s}{x} \doteq t_2\tfrac{s}{x})[\beta]$$

$\overset{\text{Def von } \mathfrak{A} \models \psi[\beta]}{\iff}$ $(t_1 \frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = (t_2 \frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta]$

$\iff$ $t_1^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{b}{x}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{b}{x}]$

$\overset{\text{Teil (1)}}{\iff}$ $\mathfrak{A} \models \phi[\beta \frac{b}{x}]$

2.2: $\phi = Rt_1 \dots t_n$: wie 2.1

2.3: $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

$\mathfrak{A} \models \phi \frac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \frac{s}{x} \wedge \psi_2 \frac{s}{x})[\beta]$

$\iff \mathfrak{A} \models \psi_1 \frac{s}{x}[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2 \frac{s}{x}[\beta]$

$\overset{\text{I.V.}}{\iff} \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta \frac{b}{x}]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta \frac{b}{x}]$

$\iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta \frac{b}{x}]$

2.4: $\phi = \neg\psi$: wie 2.3

2.5: $\phi = \exists y \psi$

Nach Vorbemerkung gilt OE $x \neq y$.

$\mathfrak{A} \models \phi \frac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \exists y \psi \frac{s}{x}[\beta]$ wg. $x \neq y$!

$\overset{\text{Def} \models}{\iff}$ ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi \frac{s}{x}[\beta \frac{a}{y}]$

$\overset{\text{I.V.}}{\iff}$ ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{y} \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{y}]}{x}]$

x frei für s in ϕ ⇒ y kommt nicht in s vor

↳ $s^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{y}] = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$

$\iff$ ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{y} \frac{b}{x}]$

$\iff \mathfrak{A} \models \phi[\beta \frac{b}{x}]$ ☑

BSP: $L_G = \{\underline{e}, \circ\}$ Grp.sprache

L-Fml. $\phi(x) = \forall y \; y \circ y \doteq x$ L-Term $s = y$

$\mathfrak{A}$ L_G-Struktur, β Belegung

$\mathfrak{A} \models \phi \frac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \forall y \; y \circ y = y$

"alle Elemente sind idempotent"

$\mathfrak{A} \models \phi[\beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}] \iff$

"alle Quadrate sind gleich $\beta(y)$"

⇝ Brauche in 1.6 "x frei für s in ϕ"