Wir verwenden die folgenden Abkürzungen:

$(\psi_1 \vee \psi_2) = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$

$(\psi_1 \rightarrow \psi_2) = \neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$

$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1))$

$\forall x\, \psi = \neg \exists x \neg \psi$

$(\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \underbrace{(\ldots(}_{n\text{-mal}} \psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n)$

$(\psi_0 \vee \ldots \vee \psi_n) = \underbrace{(\ldots(}_{n\text{-mal}} \psi_0 \vee \psi_1) \vee \ldots \vee \psi_n)$

$t_1 R t_2 = R t_1 t_2 = R(t_1, t_2)$

$\exists x_1 x_2\, \psi = \exists x_1 \exists x_2\, \psi$

Klammern (zur besseren Lesbarkeit) weglassen nach Bindungsstärke

$+$ höchste Bindungsstärke

- $\forall, \exists, \neg$
- $\wedge$
- $\vee$
- $\rightarrow, \leftrightarrow$

$-$ niedrigste Bindungsstärke

Bsp: $\neg\phi \wedge \psi \rightarrow \chi$ steht für

$((\neg\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) = \neg((\neg\phi \wedge \psi) \wedge \neg\chi)$

Beispiel für L-Formeln: Körperaxiome in $L_{Ring}$ — verwende $x, y, z$ statt $v_0, v_1, v_2$

$\neg\exists v_0 \neg\neg\exists v_1 \neg + v_0 v_1 \doteq + v_1 v_0$

Abelsche Grp. bzgl. $+$:

1. $\forall x, y \quad x + y \doteq y + x$
2. $\forall x \quad x + \underline{0} \doteq x$
3. $\forall x \quad x + (-x) \doteq 0$
4. $\forall x, y, z \quad (x + y) + z \doteq x + (y + z)$

5. $\forall x, y \quad x \cdot y \doteq y \cdot x$
6. $\forall x \quad x \cdot \underline{1} \doteq x$
7. $\forall x, y, z \; (x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)$
8. $\forall x, y, z \; x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
9. $\forall x \; (\neg x \doteq \underline{0} \rightarrow \exists y \; x \cdot y = 1)$
10. $\neg \underline{0} \doteq \underline{1}$

(1.)-(8.): kommutativer Ring mit ~~Element~~ Einselem.

Lemma 1.3 (Eindeutige Lesbarkeit von Formeln)
Jede L-Formel $\phi$ hat genau eine der folgenden Formen

(1.) $\phi = t_1 = t_2$ für L-Terme $t_1, t_2$

(2.) $\phi = R t_1 \dots t_n$ für $R \in L$ n-stelliges Fkt.symbol und $t_1, \dots, t_n$ L-Terme

(3.) $\phi = \neg \psi$ für $\psi$ L-Formel

(4.) $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für $\psi_1, \psi_2$ L-Fmln

(5.) $\phi = \exists x \psi$ für $\psi$ L-Fml., x Variable

In jedem der Fälle sind die Terme $t_i$, das Relationszeichen R, die Fmln $\psi, \psi_1, \psi_2$ und die Variable x jeweils eindeutig bestimmt.

Bew: Das genau einer der Fälle auftritt ist klar.
Eindeutigkeit der $t_i$, R, $\psi, \psi_1, \psi_2$ und x:
(2.) ✓ wie in Lemma 1.2
(3.) ✓ (5.) ✓ per Induktionsannahme
(1.) & (4.): Übung: Keine L-Fml ist echtes Anfangsstück einer anderen L-Fml. $\boxtimes$

## §1.2 Semantik

Was bedeutet es, wenn eine L-Formel $\varphi$ in einer L-Struktur gilt?
⇝ definiere dies induktiv über den Aufbau von $\varphi$!
Achtung: Ein L-Term hat erst dann einen Wert in einer L-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn man die Variablen von t mit Elementen aus A belegt.

Definition: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Belegung (der Variablen) ist eine Funktion $\beta: \{v_0, v_1, \dots\} \to A$ von der Menge der Variablen in die Grundmenge von A.

[Bem: Eigentlich wollen wir nur Variablen belegen, die in der ~~Gf~~ jeweiligen L-Fml. / dem L-Term vorkommen... ]

Definition: Für L-Terme $t$, Strukturen $\mathfrak{A}$ und Belegungen $\beta$ definieren wir $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ durch:

(1.) $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(v_i)$ falls $t = v_i$ Variable

(2.) $c^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}}$ falls $t = c$ Konstante in $L$

(3.) $ft_1 \dots t_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}(t_1{}^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta])$

falls $t = ft_1 \dots t_n$ für $f \in L$ n-stelliges Fkt.symb., $t_1, \dots, t_n$ L-Terme

Dies ist eine vernünftige Def. wegen 1.1.2!

Bsp: Sei $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$ der Körper der rationalen ~~Sprachen~~ Zahlen als L-Ring-Struktur

$t = \cdot v_0 + v_1 v_2$ (besser lesbar: $v_0 \cdot (v_1 + v_2)$ )

$\beta(v_i) = i + 2$

$\Rightarrow t^{\mathbb{Q}}[\beta] = 2 \cdot (3+4) = 14$.

Lemma 1.4: Wenn die Belegungen $\beta$ und $\gamma$ auf den Variablen übereinstimmen, die in $t$ vorkommen, gilt

$$t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$$

Beweis: Klar. (mündlich).

Schreibweise: Wenn wir einen Term $t$ in der Form $t(x_1, \dots, x_n)$ schreiben, meinen wir

1. die $x_i$ sind paarweise verschiedene Variablen, die in $t$ vorkommen
2. in $t$ kommen nur Variablen aus $\{x_1, \dots, x_n\}$ vor.

Wenn nun $a_1, \dots, a_n$ Elemente einer L-Struktur $\mathfrak{A}$ sind, ist wg. 1.4 $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]$ durch $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ für eine Belegung $\beta$ mit $\beta(x_i) = a_i$ wohldefiniert.

Def.: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Wir definieren für Belegungen $\beta$ und L-Fml $\phi$ die Relation

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$$

– $\phi$ trifft in $\mathfrak{A}$ auf $\beta$ zu – durch Rekursion über den Aufbau von $\phi$:

(1.) $\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2 [\beta] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$

(2.) $\mathfrak{A} \models R t_1 \dots t_n [\beta] \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$

$R \in L$ n-stelliges Rel. symbol

(3.) $\mathfrak{A} \models \neg \psi[\beta] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta]$

(4.) $\mathfrak{A} \models \psi_1 \wedge \psi_2 [\beta] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$

(5.) $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi[\beta] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$

Dabei ist

$$\beta\left\{\frac{a}{x}\right\}(y) = \begin{cases} \beta(y) & \text{wenn } y \neq x \\ a & \text{wenn } y = x. \end{cases}$$

Bem: Unsere Abkürzungen haben die gewünschte Interpretation, etwa:

$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2)[\beta]$

$\iff$ wenn $\mathfrak{A} \models \psi_1[\beta]$, dann $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$.

Ob $\phi$ in $\mathfrak{A}$ auf $\beta$ zutrifft, hängt nur von den freien Variablen von $\phi$ ab.

Bsp: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$ $\quad \phi = \exists x\; x \cdot x \doteq y$

$\beta_1$ Belegung, $\beta_1(y) = 9 \Rightarrow \mathbb{Q} \models \phi[\beta_1]$

$\beta_2$ $\quad \beta_2(y) = 4 \Rightarrow \mathbb{Q} \models \neg\phi[\beta_2]$

Def: Die Variable $x$ kommt frei in der Formel $\phi$ vor, wenn sie an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ liegt. Präzise:
$x$ kommt in $\phi$ frei vor:
(1.) $x$ frei in $t_1 \doteq t_2 \Leftrightarrow x$ kommt in $t_1$ oder $t_2$ vor
(2.) $x$ frei in $Rt_1 \ldots t_n \Leftrightarrow x$ kommt in einem der $t_i$ vor
(3.) $x$ frei in $\neg\psi \Leftrightarrow x$ frei in $\psi$
(4.) $x$ frei in $(\psi_1 \wedge \psi_2) \Leftrightarrow x$ frei in $\psi_1$ ~~und~~ oder frei in $\psi_2$
(5.) $x$ frei in $\exists y \psi \Leftrightarrow x$ frei in $\psi$ und $x \neq y$.

$L = \{R, P\}$   $R$ 2-stell. Rel.zeichen, $P$ 1-stell. –"–

Bsp: $\phi = \forall v_0 (\exists v_1 R(v_0, v_1) \wedge P(v_1))$
Hier ist $v_0$ nicht frei, $v_1$ kommt frei & gebunden vor.

Satz 1.5. (Koinzidenzsatz) $L$ Sprache, $\phi$ $L$-Fml, $\mathfrak{A}$ $L$-Struktur, $\beta, \gamma$ Belegungen.
Wenn $\beta$ und $\gamma$ an allen Variablen, die frei in $\phi$ vorkommen, übereinstimmen, ist
$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma].$$

<u>Bew</u>: Per Induktion über den Aufbau von $\phi$.

(1.) $\phi = t_1 \doteq t_2$
$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta] \overset{1.4}{\Leftrightarrow} t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_2^{\mathfrak{A}}[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma].$$

(2.) $\phi = Rt_1 \ldots t_n$ analog.

(3.) $\phi = \neg\psi$
$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta] \overset{I.V.}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$$

(4.) $\phi = \cancel{\exists x/\forall}\ (\psi_1 \wedge \psi_2)$

Analog zu (3.)

(5.) $\phi = \exists y\ \psi$

$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \iff$ ex $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{y}]$

$x$ frei in $\phi \Rightarrow x = y$ oder $x$ frei in $\psi$

(abgesehen von $x$ hat $\psi$ die gleichen freien Var. wie $\phi$)

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{y}]$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$ ☒

Schreibweise: Wenn wir eine Fml. in der Form $\phi(x_1,..,x_n)$ schreiben, meinen wir:

1. die $x_i$ sind paarweise verschiedene Variablen, die in $\phi$ vorkommen
2. In $\phi$ kommen nur $\{x_1,..,x_n\}$ frei vor

Für $a_1,..,a_n \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ L-Struktur) ist dann nach

1.5 $\mathfrak{A} \models \phi[a_1,..,a_n]$ wohldefiniert

(durch $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ mit $\beta(x_i) = a_i$ für $1 \leq i \leq n$)

Bem: Auf diese Weise definiert $\phi(x_1,..,x_n)$ eine n-stellige Relation

$$\{(a_1,..,a_n) \mid \mathfrak{A} \models \phi[a_1,..,a_n]\}$$

Bsp: $\phi = \exists y\ y \cdot y \doteq x$

$\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\phi(\mathbb{Q}) \subsetneq \mathbb{Q}_{\geq 0}$

Definition: Eine L-Formel $\phi$ ohne freie Variable heißt L-Aussage.

Schreibe für $\mathfrak{A}$ L-Struktur

$\mathfrak{A} \models \phi$, wenn $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ für eine (alle) Belegung(en) $\beta$ gilt.