Vorlesung: Logik 1 (Einführung in die math. Logik)
Mathematische Logik - Fundament für die Mathematik

Hilberts Programm (~1920) (Wunschliste an ein Fundament)

(1.) Finde formale Sprache, mithilfe der man die Mathematik beschreiben kann
 ⇝ Logik 1ter Stufe, Mengenlehre (ZFC)

(2.) Finde ein vollständiges System allgemeingültiger logischer Schlüsse
 ⇝ Hilbertkalkül, Gödels Vollständigkeitssatz

(3.) Finde ein vollständiges (effektives) Axiomensystem, aus dem man 'alle' Mathematik ableiten kann.
 ⇝ existiert nicht! Gödels 1ter Unvollständigkeitssatz
 (falls ZFC konsistent, existieren Sätze, die von ZFC unabh. sind. Auch schon für Arithmetik!)

(4.) Zeige, dass das in (1.) - (4.) gefundene 'formale System' widerspruchsfrei ist
 ⇝ kann man nicht mit Mitteln des Systems zeigen!
 Gödels 2ter Unabhängigkeitssatz.

Logik 1: (1.) - (4.) + etwas axiomatische Mengenlehre
 + etwas Modelltheorie

Logik 2: Modelltheorie:
 Für manche Teilbereiche der Mathematik gibt es effektive Axiomensysteme wie in (3.)
 z.B. Algebra der komplexen Zahlen
 Algebra der reellen Zahlen
 ⇝ erhalte neuen Zugang zu mathematischen Objekten!

Logik 3: Mengenlehre
Untersuche ZFC und seine Modelle, Erweiterungen von ZFC
⇝ Jagd nach Unabhängigkeiten und Widersprüchen!

Logik 4: Spezialvorlesung
baut auf Logik 2 oder 3 auf.

§ 1.1 Strukturen und Formeln

Ziel: Formale Sprache. (Zunächst: Rein syntaktisch)

Intuition: Eine Struktur ist eine nicht-leere Menge mit ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen

Beispiele: Ein Ring $(R, \underbrace{0, 1}_{\text{Elemente}}, \underbrace{+, -, \cdot}_{\text{Operationen}})$
Eine Gruppe $(G, e, \circ, ^{-1})$
Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, \underbrace{<}_{\text{Relation}})$
Die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, <)$
S ≙ Nachfolgerfkt. $x \mapsto x+1$

Hier: Relationen zweistellig, Operationen ein- oder zweistellig. Im Allgemeinen: Beliebige Stelligkeit erlaubt.

Bem: Nicht alle Gegenstände der Mathematik sind Strukturen!
Gegenbsp: Die Klasse aller Gruppen. (zu viele Elem.!)

Def: Eine Sprache ist eine Menge von Konstantenzeichen (häufig: Konstanten), Funktionszeichen und Relationszeichen.
Funktionszeichen und Relationszeichen haben eine (positive) Stelligkeit.
auch: 'Prädikate'

Beispiele von Sprachen:

- $L_\emptyset = \emptyset$ leere Sprache
- $L_{Ring} = \{\underline{0}, \underline{1}, +, -, \cdot\}$ Ringsprache
- $L_{Grp} = \{\underline{e}, \circ, ^{-1}\}$ Gruppensprache
- $L_O = \{<\}$ Ordnungssprache
- $L_{AKp} = L_{Ring} \cup L_O$ Sprache der angeord. Körper
- $L_{\mathbb{N}} = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ Sprache der natürlichen Zahlen
- $L_{Me} = \{\in\}$ Sprache der Mengenlehre.

Hierbei sind

Konstanten: $\underline{0}, \underline{1}, \underline{e}$

einstellige Funktionszeichen: $-, ^{-1}, S$

zweistellige –"–: $+, \cdot, \circ$

–"– Relationszeichen: $<, \in$.

Definition: Sei L eine Sprache. Eine L-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z \in L})$

wobei

A eine nicht-leere Menge (die Grundmenge von $\mathfrak{A}$) ist,

$z^{\mathfrak{A}} \in A$ wenn z eine Konstante ist,

$z^{\mathfrak{A}}: A^n \to A$ wenn z ein n-stelliges Fkt.symbol ist

$z^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ wenn z ein n-stelliges Rel.zeichen ist.

Also: $z^{\mathfrak{A}}$ ist die Interpretation der Zeichen von L in A.

Bsp: $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \underline{0}^{\mathbb{Q}}, \underline{1}^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$ ist L_{Ring}-Struktur.

Def: Zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen isomorph, schreibe $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn es einen Isomorphismus $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt, d.h. eine Bijektion $F: A \to B$, die mit den Interpretationen der Zeichen aus L kommutiert:

(1) $F(Z^{\mathfrak{A}}) = Z^{\mathfrak{B}}$ falls Z eine Konstante aus L

(2) $F(Z^{\mathfrak{A}}(a_1, .., a_n)) = Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1), .., F(a_n))$ falls $Z \in L$ n-stelliges Fkt.zeichen und $a_1, .., a_n \in A$

(3) $Z^{\mathfrak{A}}(a_1, .., a_n) \Leftrightarrow Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1), .., F(a_n))$ falls $Z \in L$ n-stelliges Rel.zeichen und $a_1, .., a_n \in A$.

[Bemerkung: · Bedingung (2.) ist äquivalent zu
(2.'): $Z^{\mathfrak{A}}(a_1, .., a_n) = a_0 \Leftrightarrow Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1), .., F(a_n)) = F(a_0)$
für $Z \in L$ n-stelliges Fkt.zeichen, $a_0, .., a_n \in A$.]

Bemerkung: isomorph zu sein ist eine Äquivalenzrelation
(Verknüpfung zweier Isoms ist Isom,
Umkehrung von Isom ist Isom) → Übung!

· Schreibe $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe L-Strukturen sind.

Sei L eine Sprache, $v_0, v_1, \ldots$ eine Folge von Variablen.

Definition: Ein L-Term ist eine Zeichenfolge, die nach den folgenden Regeln gebildet wird:

T1: Jede Variable ist ein L-Term

T2: Jede Konstante aus L ist ein L-Term

T3: Wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol ~~ist~~ aus L ist und $t_1, .., t_n$ L-Terme sind, dann ist auch $f t_1 \ldots t_n$ ein L-Term.

Schreibweise: · Manchmal $f(t_1, .., t_n)$ statt $f t_1 \ldots t_n$

· Wenn f zweistellig ist, auch $t_1 f t_2$ (etwa $(v_0 + v_1) \cdot (v_2 + v_3)$ statt $\cdot + v_0 v_1 + v_2 v_3$)

3

· Wenn f einstellig ist, auch t^f statt ft_1
(etwa $(x_0 \circ y_1)^{-1}$ statt $^{-1} \circ x_0 y_1$)

Lemma 1.1 (Eindeutige Lesbarkeit von Termen)
Jeder L-Term t hat genau eine der folgenden Formen:
(1.) t ist eine Variable
(2.) t ist eine Konstante
(3.) $t = ft_1 \dots t_n$, wobei f ein n-stelliges Fktsymbol ist und $t_1, \dots, t_n$ Terme sind.
Im Fall (3.) sind f und $t_1, \dots, t_n$ eindeutig bestimmt.
$\leadsto$ Klammern sind nicht nötig!

Brauche dazu
Lemma 1.2: Ein echtes Anfangsstück eines L-Terms ist kein L-Term.
Bew: Seien s, t L-Terme, s Anfangsstück von t.
Wir zeigen $s = t$ per Induktion über $|t|$.
I.A.: $|t| = 1$
$\Rightarrow |s| = 1 \Rightarrow s = t$.
I.S. $t = ft_1 \dots t_n$
Dann $s = fs_1 \dots s_n$
Z: $s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$
Angenommen nicht, sei etwa $s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k$ und $s_{k+1} \neq t_{k+1}$
$\Rightarrow s_{k+1}$ ist Anfangsstück von t_{k+1} oder umgekehrt.
↯ zur I.A. da $|s_{k+1}|, |t_{k+1}| < |t|$ ☒

Beweis von 1.1: Klar: es tritt genau einer der Fälle auf.

~~Wenn~~ Sei $f t_1 \dots t_n = e s_1, \dots s_k$

für ~~n-stellige~~ Fkt.zeichen $e, f \in L$, $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_k$ L-Terme

$\Rightarrow$ $f = e$, $n = k$

z.z. $t_1 = s_1, \dots t_n = s_n$

Ang. nicht, sei $t_1 = s_1, \dots t_m = s_m$, $t_{m+1} \neq s_{m+1}$

$\Rightarrow$ t_{m+1} ist echtes Anfangsstück von s_{m+1} oder umgekehrt! ↯ zu Lemma 1.2. ☑

L-Terme: (bestimmte) Zeichenreihen, nur Symbole aus L und Variablen kommen vor.

L-Formeln: (bestimmte) Zeichenreihen, die aus den Zeichen von L, den Klammern (und) als Hilfszeichen und den folgenden logischen Zeichen gebildet werden:

Variablen $v_0, v_1, v_2, \dots$

Gleichheitszeichen $\doteq$ "gleich"

Junktoren $\neg$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion) "nicht" "und"

Existenzquantor $\exists$ "es gibt ein"

Definition: Die folgenden Ausdrücke sind L-Formeln:

Primformeln:

F1: $t_1 \doteq t_2$, wenn t_1, t_2 L-Terme sind

F2: $R t_1 \dots t_n$ —"— $t_1 \dots t_n$ —"— und $R \in L$ n-stell. Rel.zeichen

F3: $\neg \varphi$, wenn φ eine L-Formel ist

F4: $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ wenn φ_1, φ_2 L-Fmln sind

F5: $\exists x \varphi$ wenn φ eine L-Fml. und x eine Variable ist.

Jede L-Formel entsteht auf diese Weise.