Prof. K. Tent
Dr. I. Halupczok
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Sommersemester 2013

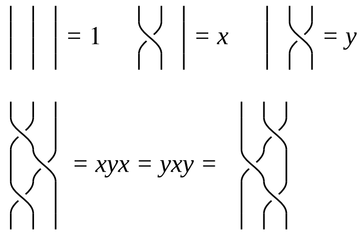
Gruppentheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

a) Schreiben Sie die folgenden Gruppen als amalgamiertes freies Produkt. Beschreiben Sie die Faktoren und die amalgamierten Untergruppen.

i) $\langle x, y \mid x^3 = y^3,\, y^6 = 1 \rangle$
ii) $\langle x, y \mid x^{30} = 1 = y^{70},\, x^3 = y^5 \rangle$

b) Schreiben Sie die Zopfgruppe $G := \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ als amalgamiertes freies Produkt zweier Kopien von $\mathbb{Z}$ und folgern Sie, dass G torsionsfrei ist.
Hinweis: $u = xy$ und $v = xyx$.



Anmerkung: Diese Gruppe heißt Zopfgruppe, weil ihre Elemente genau den „Zöpfen" aus drei Schnüren entsprechen: Das neutrale Element entspricht drei parallelen Schnüren; x und y entsprechen jeweils den Zöpfen, die rechts abgebildet sind. Verknüpfen von Zöpfen geschieht durch Hintereinanderhängen der entsprechenen Schnüre.

Die Relation $xyx = yxy$ besagt, dass die entsprechenden Zöpfe ineinander überführt werden können, ohne die Schnurenden zu bewegen.

Aufgabe 2. Geben Sie eine Charakterisierung des amalgamierten freien Produkts mit Hilfe von Abbildungen an, ähnlich wie die kategorielle Definition des freien Produkts aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass diese in der Tat das amalgamierte freie Produkt charakterisiert.

Aufgabe 3. Für $i = 1, 2$ sei $G_i := \langle d_i, s_i \mid d_i^4 = s_i^2 = 1,\, s_i^{-1} d_i s_i = d_i^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 8. Sei $H_i \leq G_i$ eine Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Finden Sie zwei Isomorphismen $\varphi, \psi \colon H_1 \to H_2$, sodass die zugehörigen amalgamierten freien Produkte von G_1 und G_2 mit H_1 und H_2 durch φ bzw. ψ amalgamiert nicht isomorph sind.
Hinweis: Um zu zeigen, dass die beiden amalgamierten Produkte nicht isomorph sind, kann man z. B. die Anzahl der Homomorphismen dieser Gruppen nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bestimmen.

Aufgabe 4. Beschreiben Sie die HNN-Erweiterung von $\mathbb{Z}$, die sich aus dem Isomorphismus $\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ ergibt als ein semidirektes Produkt aus $\mathbb{Z}$ und einer Untergruppe von $\mathbb{Q}$.

Abgabe bis Dienstag, den 25.6., 08:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/gt/`