Prof. K. Tent
Dr. I. Halupczok
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Sommersemester 2013

Gruppentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Seien $G = \langle X \mid R \rangle$ und $H = \langle Y \mid S \rangle$ Gruppen mit $X \cap Y = \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$G * H = \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$$

gilt.

Aufgabe 2. Betrachten Sie $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ von S und T erzeugt wird.
Hinweis: Sei $G = \langle S, T \rangle$. Zeigen Sie zunächst, dass jedes $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit einem Koeffizienten 0 in G liegt. Sei $|a|$ minimal, so dass es eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \setminus G$ gibt, in der a als Koeffizient vorkommt. Betrachten Sie eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \setminus G$, in welcher a als Koeffizient auftaucht. Verwenden Sie nun den euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die von A und B in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ erzeugte Untergruppe frei von Rang 2 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung auf $\mathbb{R}^2$ und wenden Sie das Pingpong-Lemma auf $X_1 = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \}$ und $X_2 = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y| \}$ an.

Aufgabe 4. Sei $G = H_1 * \cdots * H_n$.

a) Zeigen Sie: Ist $A \leq G$ eine abelsche Untergruppe, so ist A zyklisch oder es gibt $i \leq n$, $g \in G$ mit $A \leq gH_ig^{-1}$.

*b) Benutzen Sie a), um die auflösbaren Untergruppen von G zu beschreiben, falls $H_1, \ldots, H_n$ zyklisch sind.
Hinweis: Wie sieht der Normalisator einer abelschen Untergruppe aus?

Abgabe bis Dienstag, den 17.6., 08:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/gt/`