Prof. K. Tent
Dr. I. Halupczok
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Sommersemester 2013

# Gruppentheorie
# Übungsblatt 8

**Aufgabe 1.** Seien $X$ und $Y$ zusammenhängende Graphen und sei $f : (X, x) \to (Y, y)$ ein Morphismus. Zeigen Sie: Die durch $f_*([p]) = [f(p)]$ definierte Abbildung von $\pi_1(X, x)$ nach $\pi_1(Y, y)$ ist ein Homomorphismus. *4 Punkte*

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$\langle a, b \mid aba^{-1} = b^2,\ bab^{-1} = a^2 \rangle$$

trivial ist. *2 Punkte*

**Aufgabe 3.**

a) Sei $G$ eine Gruppe, die von Elementen $t_1, \ldots, t_{n-1}$ erzeugt wird und die die folgenden Relationen erfüllt:

$$\begin{gathered} t_1^2 = \cdots = t_{n-1}^2 = 1, (t_1 t_2)^3 = \cdots = (t_{n-2} t_{n-1})^3 = 1, \\ t_i t_j = t_j t_i \text{ falls } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ und } j \geq i+2 \end{gathered} \tag{$\star$}$$

Sei $H$ die von $t_2, \ldots, t_{n-1}$ erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie, dass der Index $[G : H]$ höchstens $n$ ist und folgern Sie, dass $|G| \leq n!$ ist.
*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Menge

$$H \cup H \cdot t_1 \cup H \cdot t_1 \cdot t_2 \cup \cdots \cup H \cdot t_1 \cdots t_{n-1}$$

unter rechts-Multiplikation mit $t_1, \ldots, t_{n-1}$ abgeschlossen ist.

b) Zeigen Sie: $S_n \cong \langle t_1, \ldots, t_{n-1} \mid (\star) \rangle$. *6 Punkte*

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie die Präsentation der Diedergruppe $D_n \cong \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^n \rangle$. Sei $H$ der Kern der kanonischen Abbildung $F(s, t) \to D_n$.

a) Zeigen Sie, dass

- falls $n = 2k$: die Menge aller Anfangsstücke von $(st)^k$ und von $(st)^{k-1}s$
- falls $n = 2k + 1$: die Menge aller Anfangsstücke von $(st)^k s$ und von $(st)^k$

eine Schreier-Transversale für $H$ in $F(s, t)$ ist.

b) Geben Sie eine Basis von $H$ an. *4 Punkte*

*Abgabe bis Dienstag, den 10.6., 08:00 Uhr*
*Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.*
*Web-Seite:* `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/gt/`