Prof. K. Tent
Dr. I. Halupczok
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Sommersemester 2013

Gruppentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Es sei X eine Menge, $|X| \geq 3$ und $p, q \in \mathrm{Alt}(X)$ 3-Zykel. Zeigen Sie, dass die Bedingungen

a) $|\mathrm{supp}_X(p) \cap \mathrm{supp}_X(q)| = 2$ und
b) $\langle p, q \rangle \cong \mathrm{Alt}(4)$

äquivalent sind. *3 Punkte*

Aufgabe 2. Sei $G \neq \{e\}$ eine endliche Gruppe und p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt. Zeigen Sie: Ist $H \leq G$ mit $[G : H] = p$, so ist H ein Normalteiler von G. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie: Eine Gruppe G mit Normalteiler N ist ein semidirektes Produkt $N \rtimes H$ genau dann, wenn der Homomorphismus $\pi : G \to G/N$ ein Rechtsinverses besitzt, es also einen Homomorphismus $\sigma : G/N \to G$ gibt mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{G/N}$.
b) Zeigen Sie: Ist $G = N \rtimes H$ und H normal in G, dann ist $G \cong N \times H$.
c) Sei K ein Körper und seien

$$B := \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass $B = U \rtimes T$ ist.
4 Punkte

(Bitte wenden.)

Sei G eine Gruppe und $i \in G \setminus \{e\}$. Dann heißt i Involution falls $i^2 = e$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 3$; dann ist die *Diedergruppe* D_n die Automorphismengruppe des regulären n-Ecks.

a) Zeigen Sie:

   i) $|D_n| = 2n$.

   ii) Es gibt Elemente $d, s \in D_n$, so dass $\langle d, s \rangle = D_n$ und $d^n = e$, $s^2 = e$ sowie $sds = d^{-1}$ gilt.

   iii) $D_n = \langle d \rangle \rtimes \langle s \rangle$. Gilt auch $D_n \cong \langle d \rangle \times \langle s \rangle$?

b) Bestimmen Sie das Zentrum von D_n.

c) Sei G eine endliche Gruppe von Ordnung ≥ 6. Zeigen Sie, dass G genau dann von zwei Involutionen erzeugt wird, wenn G eine Diedergruppe ist.
Hinweis: Finden Sie einen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Verwenden Sie nun Aufgabenteil a) iii). (Wann sind zwei semidirekte Produkte isomorph?) *6 Punkte*

Abgabe bis Dienstag, den 6.5., 08:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/gt/`