Prof. K. Tent
Dr. I. Halupczok
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Sommersemester 2013

Gruppentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Es sei X eine Menge, $|X| \geq 3$ und $a, b \in X$ verschiedene Elemente. Zeigen Sie, dass die Menge aller 3-Zykel (a, b, x) mit $x \in X \setminus \{a, b\}$ die Gruppe $\mathrm{Alt}(X)$ erzeugt. *2 Punkte*

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie: Wenn alle Elemente einer Gruppe G Ordnung ≤ 2 haben, dann ist G abelsch und isomorph zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
b) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn alle Elemente einer Gruppe G Ordnung ≤ 3 haben, dann ist G abelsch.
c) Es sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie: Wenn G auflösbar (bzw. perfekt) ist, dann ist auch $\phi(G)$ auflösbar (bzw. perfekt).
d) Zeigen Sie, dass Untergruppen auflösbarer Gruppen auflösbar sind. Gilt entsprechendes auch für perfekte Gruppen? *4 Punkte*

Aufgabe 3. Sei F ein Körper mit $|F| \geq 4$. Zeigen Sie:

a) Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(F)$ wird von den Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in F$ erzeugt. Folgern Sie, dass $\mathrm{SL}_2(F)$ perfekt ist.
b) $\mathrm{SL}_2(F)$ wirkt auf $\mathbb{P}^1(F)$, der Menge der eindimensionalen Untervektorräume von F^2, zweifach transitiv. Bestimmen Sie das Zentrum Z von $\mathrm{SL}_2(F)$ und zeigen Sie, dass Z genau der Kern der Wirkung ist.
c) $\mathrm{SL}_2(F)/Z = \mathrm{PSL}_2(F)$ ist einfach. *4 Punkte*

(Bitte wenden.)

Sei G eine Gruppe. Dann ist die *Fittinggruppe* von G, $F(G)$, als das Produkt aller nilpotenten Normalteiler von G definiert.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und A und B Normalteiler von G.

a) Zeigen Sie: Für jeden Normalteiler C von G gilt $[AB, C] = [A, C][B, C]$.

b) Zeigen Sie, dass falls A und B nilpotent sind, dann ist auch AB nilpotent.

c) Folgern Sie, dass für jede endliche Gruppe G die Fittinggruppe $F(G)$ ein nilpotenter Normalteiler von G ist. *6 Punkte*

Abgabe bis Dienstag, den 29.4., 08:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/gt/`