Prof. K. Tent
Dr. I. Halupczok
Dr. F. Jahnke

Universität Münster
Sommersemester 2013

Gruppentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei X eine endliche Menge und $G = \mathrm{Sym}(X)$.

a) Zeigen Sie, dass $|G| = |X|!$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass G von Transpositionen erzeugt wird.
c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Alt}(G)$ eine normale Untergruppe von Index 2 von $\mathrm{Sym}(X)$ ist, wenn $|X| \geq 2$.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Gruppe $G = \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ und die Menge $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ ((P, Q), A) &\mapsto P \cdot A \cdot Q^{-1} \end{aligned}$$

eine Wirkung von G auf X definiert.
b) Beschreiben Sie die Zerlegung von X in die Bahnen dieser Wirkung.
c) Ist die Wirkung transitiv? Ist sie treu? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, die transitiv auf einer Menge X wirkt.

a) Zeigen Sie: Wenn es einen Normalteiler N und ein Element $x \in X$ gibt, so dass $N \subseteq G_x$, dann liegt N im Kern der Wirkung.
b) Sei nun Y eine weitere Menge, auf der G wirkt und $\rho : X \to Y$ eine G-äquivariante Abbildung.
Zeigen Sie, dass ρ genau dann injektiv ist, wenn es ein $x \in X$ gibt, so dass $G_x = G_{\rho(x)}$.

Aufgabe 4. Es sei G_n die Gruppe der Symmetrien des n-dimensionalen Würfels. Bestimmen Sie die Ordnung von G_n induktiv für jedes n.

Abgabe bis Donnerstag, den 18.4., 09:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/gt/`