WWU MÜNSTER

Modelltheorie henselsch bewerteter Körper

Zwischen Modelltheorie und Arithmetik

JProf. Dr. Franziska Jahnke

6. April 2022

living.knowledge

MM Mathematics Münster
Cluster of Excellence

Kurzvorstellung

Akademische Stationen

2004 – 2009	Studium (Mathematik und Informatik) an der Universität Freiburg
2009 – 2013	Promotion (Mathematische Logik) an der Universität Oxford
2013 – 2017	Akademische Rätin a.Z. an der WWU Münster
2017 –	Juniorprofessorin an der WWU Münster
2022	Aufnahme in das Junge Kolleg der AWK

Persönliches

Mutter zweier Kinder (*2016 und *2020)

VC-Dimension einer Relation

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

VC-Dimension einer Relation

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

VC-Dimension ≥ 2

franziska.jahnke@uni-muenster.de

VC-Dimension einer Relation

0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	...
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	...
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	...
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	...
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	...
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	...
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	...
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

VC-Dimension ≥ 2

VC-Dimension ≥ 3

VC-Dimension einer Relation

0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	...
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	...
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	...
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	...
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	...
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	...
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	...
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

VC-Dimension ≥ 2

VC-Dimension ≥ 3

Definition:

Eine Struktur ist NIP, wenn jede definierbare Relation endliche VC-Dimension hat.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

VC-Dimension einer Relation

$<$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	…
3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	…
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	…
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	…
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	…
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

VC-Dimension $= 1$

Definition:

Eine Struktur ist NIP, wenn jede definierbare Relation endliche VC-Dimension hat.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Definition

Eine Struktur ist NIP, wenn jede definierbare Relation endliche VC-Dimension hat.

 franziska.jahnke@uni-muenster.de

Definition

Eine Struktur ist NIP, wenn jede definierbare Relation endliche VC-Dimension hat.

Bemerkung:

- $\rightsquigarrow$ Definition wurde Anfang der 70er Jahre zeitgleich in der Theorie des statistischen Lernens (Vapnik-Chervonenkis) und in der Modelltheorie (Shelah) entwickelt.

Definition

Eine Struktur ist NIP, wenn jede definierbare Relation endliche VC-Dimension hat.

Bemerkung:

- Definition wurde Anfang der 70er Jahre zeitgleich in der Theorie des statistischen Lernens (Vapnik-Chervonenkis) und in der Modelltheorie (Shelah) entwickelt.
- Anwendung im Bereich maschinelles Lernen:
  Satz (Blumer, Ehrenfeucht, Haussler, Warmuth): Eine Relation ist genau dann PAC-lernbar, wenn sie endliche VC-Dimension hat.

Definition

Eine Struktur ist NIP, wenn jede definierbare Relation endliche VC-Dimension hat.

Bemerkung:

- ⇝ Definition wurde Anfang der 70er Jahre zeitgleich in der Theorie des statistischen Lernens (Vapnik-Chervonenkis) und in der Modelltheorie (Shelah) entwickelt.
- ⇝ Anwendung im Bereich maschinelles Lernen:
  Satz (Blumer, Ehrenfeucht, Haussler, Warmuth): Eine Relation ist genau dann PAC-lernbar, wenn sie endliche VC-Dimension hat.

Frage

Gibt es eine natürliche (algebraische) Beschreibung, die genau die grundlegenden mathematischen Objekten mit NIP charakterisiert?

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p \ni p^2 + 2p^4 + p^5$

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p \ni p^2 + 2p^4 + p^5 + \dots$

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \ : \ a_i \in \{0, \ldots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \ : \ a_i \in \{0, \ldots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist ‘wie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$’ oder ‘wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$’ oder ‘wie die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$’.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Körper und Bewertungen
Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \;:\; a_i \in \{0, \ldots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Eine Bewertung auf einem Körper misst die Größe von Elementen.

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist ‘wie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$’ oder ‘wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$’ oder ‘wie die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$’.

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \,:\, a_i \in \{0, \dots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Eine Bewertung auf einem Körper misst die Größe von Elementen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $v_p(\sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i) = \min\{i \in \mathbb{Z} : a_i \neq 0\}$

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist ‘wie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$’ oder ‘wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$’ oder ‘wie die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$’.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \,:\, a_i \in \{0, \ldots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Eine Bewertung auf einem Körper misst die Größe von Elementen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $v_p(\sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i) = \min\{i \in \mathbb{Z} : a_i \neq 0\}$

Ein Körper mit Bewertung ist henselsch, wenn jedes Polynom, welches eine approximative einfache Nullstelle hat, bereits eine Nullstelle hat.

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist ‘wie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$’ oder ‘wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$’ oder ‘wie die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$’.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Körper und Bewertungen

Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \;:\; a_i \in \{0, \dots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Eine Bewertung auf einem Körper misst die Größe von Elementen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $v_p(\sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i) = \min\{i \in \mathbb{Z} : a_i \neq 0\}$

Ein Körper mit Bewertung ist henselsch, wenn jedes Polynom, welches eine approximative einfache Nullstelle hat, bereits eine Nullstelle hat.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $(\mathbb{Q}_p, v_p)$ ist henselsch, $(\mathbb{Q}, v_p)$ ist nicht henselsch.

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist ‘wie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$’ oder ‘wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$’ oder ‘wie die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$’.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Körper und Bewertungen
Rechenbereiche und Größenfunktionen

Ein Körper ist ein Zahlbereich, in dem $+$ und $\cdot$ die üblichen Gesetze erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \ : \ a_i \in \{0, \ldots, p-1\}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Eine Bewertung auf einem Körper misst die Größe von Elementen.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $v_p(\sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i) = \min\{i \in \mathbb{Z} : a_i \neq 0\}$

Ein Körper mit Bewertung ist henselsch, wenn jedes Polynom, welches eine approximative einfache Nullstelle hat, bereits eine Nullstelle hat.

$\rightsquigarrow$ Beispiel: $(\mathbb{Q}_p, v_p)$ ist henselsch, $(\mathbb{Q}, v_p)$ ist nicht henselsch.

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist separabel abgeschlossen oder reell abgeschlossen oder trägt eine nicht-triviale henselsche Bewertung.

Die Shelah Vermutung
Was wir wissen

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist separabel abgeschlossen oder reell abgeschlossen oder trägt eine nicht-triviale henselsche Bewertung.

franziska.jahnke@uni-muenster.de

Die Shelah Vermutung
Was wir wissen

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist separabel abgeschlossen oder reell abgeschlossen oder trägt eine nicht-triviale henselsche Bewertung.

Satz (Anscombe-Jahnke, 2019)

Die Shelah Vermutung ist zu einer algebraischen Charakterisierung aller NIP Körper äquivalent.

Die Shelah Vermutung

Was wir wissen

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist separabel abgeschlossen oder reell abgeschlossen oder trägt eine nicht-triviale henselsche Bewertung.

Satz (Anscombe-Jahnke, 2019)

Die Shelah Vermutung ist zu einer algebraischen Charakterisierung aller NIP Körper äquivalent.

Satz (Johnson, 2020)

Die Shelah Vermutung gilt für alle dp-endlichen Körper.

Vermutung (Shelah)

Jeder unendliche NIP Körper ist separabel abgeschlossen oder reell abgeschlossen oder trägt eine nicht-triviale henselsche Bewertung.

Satz (Anscombe-Jahnke, 2019)

Die Shelah Vermutung ist zu einer algebraischen Charakterisierung aller NIP Körper äquivalent.

Satz (Johnson, 2020)

Die Shelah Vermutung gilt für alle dp-endlichen Körper.

Weiteres Anwendungsgebiet der Methoden $\rightsquigarrow$ algebraische Zahlentheorie!