Ringvorlesung
3.4.2019

Das Banach-Tarski-Paradoxon
(oder die Verdoppelung der Welt)

Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Die polnischen Mathematiker Banach und Tarski haben 1924 bewiesen, dass die Kugel B so in endl. viele disjunkte Teile zerlegen kann, so dass man aus diesen Teilen zwei ganze Einheitskugeln (und dann sogar beliebig viele) zusammen setzen kann!

(Angewandt auf unsere Erdkugel erhalten wir die Verdoppelung der Welt!)

Wir wollen diese Aussage mathematisch genauer formulieren:

__Erinnerung__: Eine __Bewegung__ des $\mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung der Form

$$\tau_{(A,b)}: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3 \,;\; \tau_{(A,b)}(x) = Ax+b$$

mit $b \in \mathbb{R}^3$ fest und $A \in SO(3) = \{O \in M_3(\mathbb{R}) \mid O^TO = E_3 = OO^T$
(also die Komposition der Drehung $x \mapsto Ax$ mit der Translation $y \mapsto y+b$).

Die Menge $G_3 := \{\tau_{(A,b)} \mid A \in SO(3),\, b \in \mathbb{R}^3\}$ bildet die __Bewegungsgruppe__ des $\mathbb{R}^3$ (mit Komposition als Verknüpfung!).

Der Satz von Banach-Tarski lautet dann wie folgt:

Satz (Banach-Tarski, 1924) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung $B = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_\ell \dot\cup C_1 \dot\cup \dots \dot\cup C_m$ von B in disjunkte Teilmengen, und Bewegungen $\tau_1, \dots, \tau_\ell, \sigma_1, \dots, \sigma_m \in G_3$ mit

$$\begin{aligned} B &= \tau_1(A_1) \dot\cup \cdots \dot\cup \tau_\ell(A_\ell) \\ &= \sigma_1(C_1) \dot\cup \cdots \dot\cup \sigma_m(C_m). \end{aligned} \quad \text{(disjunkte Vereinig.)}$$

Beobachtungen:

1) Die Mengen $A_1, \dots, A_\ell, C_1, \dots, C_m$ sind nicht alle Lebesgue-messbar, denn das Lebesgue-Maß ist invariant unter Bewegungen: Wären $A_1, \dots, A_\ell, C_1, \dots, C_m$ messbar, so wäre

$$0 \neq \lambda_3(B) = \sum_1^\ell \lambda_3(A_i) + \sum_j^m \lambda_3(C_j) = \sum_1^\ell \lambda_3(\tau_i(A_i)) + \sum_j^m \lambda_3(\sigma_m(C_m))$$

$$= \lambda_3(B) + \lambda_3(B) = 2\lambda_3(B) \quad \text{Wid!}$$

2) Der Satz zeigt: Es kann kein G_3-invariantes endl. additives Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0,\infty]$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ existieren!

3) Es gibt zahlreiche Varianten des Satzes, z.B. gelten analoge Aussagen für $\mathbb{R}^n$ $\forall n \geq 3$, aber nicht für $n = 1,2$!

Der Beweis des Satzes basiert auf dem Auswahl-Axiom der Mengenlehre: Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge nichtleerer Mengen, so kann aus jedem $M \in \mathfrak{M}$ "simultan" ein $m \in M$ ausgewählt werden

<u>Anders ausgedrückt</u>: Ist $M \neq \emptyset$ $\forall M \in \mathfrak{M}$, so gilt auch $\prod_{M \in \mathfrak{M}} M \neq \emptyset$.

Wir wollen uns nun den Beweis des Satzes von Banach-Tarski erarbeiten. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen:

<u>Gruppenwirkungen</u>: Ist G eine Gruppe, so sagen wir G <u>operiert</u> auf der Menge X, falls eine Abb.

$$G \times X \to X \; ; \; (g, x) \to g \cdot x$$

ex. mit

(1) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ $\forall g, h \in G, x \in X$, und

(2) $ex = x$ $\forall x \in X$ (e = neutr. Element von G)

Ist $g \in G$ fest, so ist dann $x \mapsto g \cdot x$ bijektiv mit Umkehrabb. $x \mapsto g^{-1} x$.

<u>Bsp</u>: (1) $G_3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $(\tau, x) \mapsto \tau \cdot x := \tau(x)$.

(2) Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die 2-Sphäre

Dann ist $SO(3) \times S^2 \to S^2$; $(A, x) \mapsto A \cdot x$ eine Wirkung von $SO(3)$ auf S^2.

(3) Jede Gruppe operiert auf sich selbst durch $G \times G \to G$; $(g, h) \mapsto gh$.

Operiert G auf X so schreiben wir für alle $g \in G$, $A \subseteq X$:

$$g \cdot A = \{g \cdot a \mid a \in A\}$$

Operiert G auf X, so heißt X ein <u>G-Raum</u>.

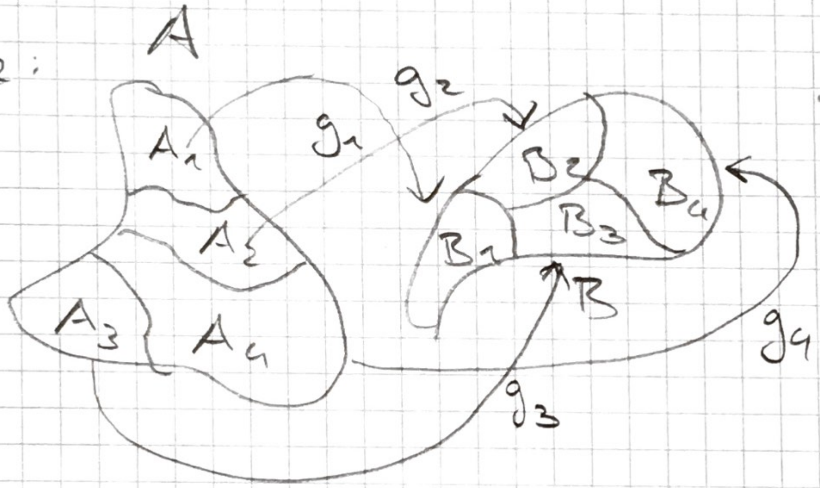
Definition 1 (a) Sei X ein G-Raum. Zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ heißen gleichzerlegbar bzgl. G (Bez. $A \sim_G B$), falls disjunkte Zerlegungen

$$A = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_\ell, \quad B = B_1 \dot\cup \dots \dot\cup B_\ell$$

und Elemente $g_1, \dots, g_\ell \in G$ existieren, mit

$$g_i A_i = B_i \quad \forall\, 1 \le i \le \ell.$$

Skizze:



Nachrechnen: $\sim_G$ ist eine Äquivalenzrelation!

(b) Wir schreiben $A \preceq_G B$, falls $A \sim_G C$ für ein $C \subseteq B$ gilt.

(c) $\emptyset \neq B \subseteq X$ heißt G-paradox, falls ein $A \subseteq B$ ex. mit $A \sim_G B \sim_G (B \setminus A)$.

Beachte: Der Satz von Banach-Tarski ist gerade die Aussage, dass $B = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ G_3-paradox ist. [Ist $A = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$, $C = C_1 \cup \dots \cup C_m = B \setminus A$ wie im Satz, so folgt $A \sim_{G_3} B \sim_{G_3} (B \setminus A)$.]

Lemma 1 (a) Ist A G-paradox, $A \sim_G B$, so ist auch B G-paradox.

(b) Es gilt: $A \preceq_G B$ und $B \preceq_G A \Rightarrow A \sim_G B$.

Bevor wir das Lemma beweisen, formulieren wir

<u>Folgerung 1</u>: Sei X ein G-Raum. Für $B \subseteq X$ sind äquivalent:

(1) B ist G-paradox.

(2) $\exists\, A \subseteq B,\ C \subseteq B \setminus A$ mit $A \sim_G B \sim_G C$.

<u>Bew.</u>: (1) $\Rightarrow$ (2) Klar mit $C = B \setminus A$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Da $C \subseteq B \setminus A$ gilt $B \preceq_G B \setminus A$. Da $B \setminus A \subseteq B$ gilt auch $B \setminus A \preceq_G B$. Lemma 1 (b) liefert dann $B \sim_G B \setminus A$. $\blacksquare$

<u>Bew. von Lemma 1</u> (a) folgt leicht aus der Def.
<u>Zu (b)</u>: Seien $C \subseteq B$ und $D \subseteq A$ mit $A \sim_G C$, $B \sim_G D$.
Seien

$$A = A_1 \dot\cup \cdots \dot\cup A_\ell \qquad C = C_1 \dot\cup \cdots \dot\cup C_\ell \qquad \text{(disjunkt)}$$
$$B = B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup B_m \qquad D = D_1 \dot\cup \cdots \dot\cup D_m$$

und $g_1, \dots, g_\ell, h_1, \dots, h_m \in G$ mit

$$C_i = g_i A_i \quad \text{und} \quad D_j = h_j B_j \quad \forall \begin{array}{l} 1 \le i \le \ell \\ 1 \le j \le m. \end{array}$$

Wir def. dann bijektive Abb.

$$f: A \to C\,, \quad F: B \to D \quad \text{durch}$$

$$f(a) = g_i a \text{ falls } a \in A_i\,, \quad F(b) = h_j b\,, \text{ falls } b \in B_j.$$

Es folgt dann leicht, dass für alle $\tilde{A} \subseteq A$, $\tilde{B} \subseteq B$ gilt: $\tilde{A} \sim_G f(\tilde{A})$ und $\tilde{B} \sim_G F(\tilde{B})$.
[Setze $\tilde{A}_i = A_i \cap \tilde{A}$, $\tilde{C}_i = g_i \tilde{A}_i \subseteq C$, etc.]

Wir def. nun rekursiv eine Folge von Teilmengen $E_n \subseteq A$ durch

$$E_0 = A \setminus D\,, \quad E_{n+1} = F \circ f(E_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und setzen $E := \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} E_n$. Dann gilt:

$A \setminus E \subseteq A \setminus E_0 = D$ und damit

$A \setminus E \sim_G \tilde{B} := F^{-1}(A \setminus E) \subseteq B$ (da $\tilde{B} \sim_G F(\tilde{B}) = A \setminus E$)

Ferner gilt: $\tilde{B} = F^{-1}(A \setminus E) = B \setminus f(E)$, denn

$$F^{-1}(\underbrace{A \setminus E}_{\subseteq D}) = F^{-1}(D \setminus E) \overset{E_0 \cap D = \emptyset}{=} F^{-1}(D \setminus F(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E_n))$$

$$= B \setminus F^{-1}(\dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} F \circ f(E_n)) = B \setminus \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} f(E_n) = B \setminus f(\underbrace{\dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} E_n}_{=E})$$

Damit folgt $A \setminus E \sim_G B \setminus f(E)$ <u>und</u> $E \sim_G f(E)$.

Zusammen folgt:

$A = (A \setminus E) \dot{\cup} E \sim_G B \setminus f(E) \dot{\cup} f(E) = B$ $\blacksquare$

Im einem nächsten Lemma, das wir mehrmals anwenden werden, zeigen wir, dass wir geeignete Ausnahmemengen für G-Paradoxie „weglügen" können.

Lemma 2: Sei X ein G-Raum und $E \subseteq B \subseteq X$. Ferner existiere ein $g \in G$ mit $g^n E \cap E = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B \sim_G B \setminus E$.

Insb. folgt: B G-paradox $\Leftrightarrow$ $B \setminus E$ G-paradox.

<u>Beweis</u>: Betrachte:

$$\hat{E} = E \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} g^n E = E \dot{\cup} g(\dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} g^n E) = E \dot{\cup} g(\hat{E}).$$

Damit folgt $B = \hat{E} \dot{\cup} (B \setminus \hat{E}) \sim_G g(\hat{E}) \dot{\cup} (B \setminus \hat{E}) = B \setminus E$ $\blacksquare$

Wir kommen nun zu einem zentralen Beispiel:

Freie Gruppe: Die freie Gruppe F_2 in zwei Erzeugern a, b ist def durch

$F_2 := \{$"gekürzte" endl. Wörter in $a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \cup \{e\}$

wobei e das "leere Wort" bezeichnet.
Gekürzt bedeutet, dass a nicht mit a^{-1} und b nicht mit b^{-1} benachbart sein kann.

Bsp: $w = a b a^{-1} a^{-1} b b b a a a a b^{-1} =: a b a^{-2} b^3 a^4 b^{-1}$

Mult: Zusammen fügen und kürzen!

Bsp: $(a b^2 a^{-2} b^3) \cdot (b^{-3} a b) = a b^2 a^{-1} b$.
und $ew = we = w$ für jedes Wort w.

F_2 ist dann auch ein F_2-Raum bzgl. Mult.
$F_2 \times F_2 \to F_2$; $(w, v) \to w \cdot v$.

Satz 1: F_2 ist F_2-paradox.

Beweis: $A^+ = \{w \in F_2 \mid w$ beginnt mit $a\}$
$A^- = \{w \in F_2 \mid w$ " " $a^{-1}\}$
$B^+ = \{w \in F_2 \mid w$ " " $b\}$
$B^- = \{w \in F_2 \mid w$ " " $b^{-1}\}$

Dann gilt

$$F_2 = A^+ \dot\cup A^- \dot\cup B^+ \dot\cup B^- \cup \{e\}$$
$$= a^{-1}A^+ \dot\cup A^- = b^{-1}B^+ \dot\cup B^-,$$

Mit $A = A^+ \dot\cup A^-$
$B = B^+ \dot\cup B^-$

folgt: $A \sim_G F_2 \sim_G B$ mit $B \subset F_2 \setminus A$. ∎

<u>Notation</u>: Ein G-Raum heißt <u>frei</u>, falls für alle $g \in G$ und $x \in X$ gilt:

$$gx = x \Longrightarrow g = e. \quad (e = \text{neutr. Element})$$

<u>Beachte</u>: Ist X ein freier G-Raum, so ist für alle $x \in X$ die Abb.

$$G \to Gx := \{gx \mid g \in G\} \; ; \; g \mapsto gx$$

bijektiv. Ferner gilt: durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow Gx = Gy$$

wird eine Äquivalenzrelation auf X def. mit $[x]_\sim = Gx \quad \forall x \in X$.

Nach dem Auswahlaxiom können wir eine Teilmenge $\tilde{X} \subseteq X$ wählen, so dass für alle $x \in X$ <u>genau ein</u> $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ex. mit

$$\{\tilde{x}\} = \tilde{X} \cap Gx.$$

<u>Skizze</u>

Es folgt dann

$$X = G\cdot\tilde{X} = \dot{\bigcup_{g \in G}} g\tilde{X}.$$

<u>Folgerung 2</u> Jeder freie F_2-Raum X ist F_2-paradox.

<u>Bew</u>: Sei $\tilde{X} \subseteq X$ wie oben. Dann folgt wie für F_2:

$$X = F_2\tilde{X} = (a^{-1}A^+ \,\dot\cup\, A^-)\tilde{X} = (b^{-1}B^+ \,\dot\cup\, B^-)\tilde{X}$$

$$= \underbrace{a^{-1}(A^+\tilde{X}) \,\dot\cup\, A^-\tilde{X}}_{\sim_{F_2}\ (A^+ \dot\cup A^-)\tilde{X}} = \underbrace{b^{-1}(B^+\tilde{X}) \,\dot\cup\, B^-\tilde{X}}_{\sim_{F_2}\ (B^+ \dot\cup B^-)\tilde{X}}$$

also

$$A\tilde{X} \sim_{F_2} X \sim_{F_2} B\tilde{X} \quad \text{mit } A = A^+ \,\dot\cup\, A^-, \quad B = B^+ \,\dot\cup\, B^-$$

$\blacksquare$

<u>Satz 2</u> Es gilt $F_2 \subseteq SO(3)$ (genauer: $\exists$ injekt. Homom. $\varphi: F_2 \hookrightarrow SO(3)$).

<u>Bew:</u> Für alle $\tilde{a}, \tilde{b} \in SO(3)$ ex. genau ein Homom. $\varphi_{\tilde{a},\tilde{b}}: F_2 \to SO(3)$ mit $\varphi_{\tilde{a},\tilde{b}}(a) = \tilde{a}$, $\varphi_{\tilde{a},\tilde{b}}(b) = \tilde{b}$ (dann gilt z.B. $\varphi_{\tilde{a},\tilde{b}}(aba^2b^{-1}a^{-1}) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^2\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ etc).

Dann gilt $\varphi_{\tilde{a},\tilde{b}}$ ist genau dann injektiv, wenn für jedes gekürzte Wort ω in $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}^{-1}$ gilt: $\omega = 1 \iff \omega = e$ (= leeres Wort).

Zu zeigen ist, dass Elemente $\tilde{a}, \tilde{b} \in SO(3)$ mit dieser Eigenschaft existieren.

<u>Dazu:</u> Setze $u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in SO(3)$$

Sei dann ω ein bel. gekürztes Wort in $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}^{-1}$. Da

$$\tilde{a}\omega\tilde{a}^{-1} = 1 \iff \omega = 1$$

können wir o.B.d.A annehmen, dass ω mit $\tilde{a}$ od. $\tilde{a}^{-1}$ endet.

<u>Behauptung:</u>
Ist ω gekürztes Wort in $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}^{-1}$ der Länge $k \neq 0$ mit letztem Buchstaben $\tilde{a}$ od. $\tilde{a}^{-1}$, so gilt

$w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\r\end{pmatrix}$ mit $m, l, r \in \mathbb{Z}$ und <u>m nicht teilbar durch 3</u>! 10

Insbesondere folgt $m \neq 0$ und $w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, also $w \neq 1$

<u>Induktion nach k:</u>

<u>$k=1$:</u> $w = \tilde{a} \vee w = \tilde{a}^{-1}$. Dann folgt wegen $\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}^t$, dass

$$w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \text{ oder } w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

<u>$k \to k+1$:</u> Sei $w = cw'$ mit $|w| = k+1$, $|w'| = k$

w' endet mit $\tilde{a} \vee \tilde{a}^{-1}$, $c \in \{\tilde{a}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}, \tilde{b}^{-1}\}$.

Nach Ind. Vor gilt

$w'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\r'\end{pmatrix}$ mit m' <u>nicht</u> teilbar durch 3.

Einsetzen und Nachrechnen liefert dann:

$w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\r\end{pmatrix}$ mit $\left\{\begin{array}{l} l = l' \mp 4m' \\ m = m' \pm 2l' \\ r = 3r' \end{array}\right\}$, falls $c = \tilde{a}^{\pm 1}$

bzw. $\left\{\begin{array}{l} l = 3l' \\ m = m' \mp 2r' \\ r = r' \pm 4m' \end{array}\right\}$, falls $c = \tilde{b}^{\pm 1}$

<u>Zeige:</u> m ist nicht durch 3 teilbar!

Dazu betrachten wir die folgenden 4 Fälle:

(1) $w = \tilde{a}^{\pm 1}\tilde{b}^{\pm 1}v$, (2) $w = \tilde{b}^{\pm 1}\tilde{a}^{\pm 1}v$, (3) $w = \tilde{a}^{\pm 2}v$

(4) $w = \tilde{b}^{\pm 2}v$,

wobei v ein Wort der Länge $k-1$, oder $v = e$.

In den Fällen (1) + (2) gilt nach obiger Formel

$m = m' \pm 2l'$ mit l' durch 3 teilbar (Fall 1)

$m = m' \pm 2r'$ mit r' durch 3 teilbar (Fall 2)

Da m' nicht durch 3 teilbar ist dann auch m nicht durch 3 teilbar?

Im Fall (3) gilt mit $v\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l''\\ m''\sqrt{2}\\ r''\end{pmatrix}$

$$m = m' \pm 2l' = m' \pm 2(l'' \mp 4m'')$$

$$= m' \pm 2l'' - 8m'' = m' - 9m'' + \underbrace{(m'' \pm 2l'')}_{= m'}$$

$$= 2m' - 9m''$$

und da m' nicht durch 3 teilbar ist, ist auch m nicht durch 3 teilbar

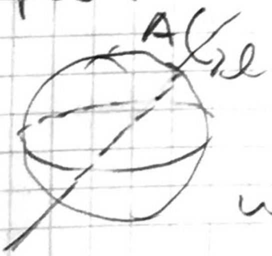
Fall (4) folgt analog? ∎

<u>Lemma 3</u> (Hausdorff) Es existiert eine abz. Teilmenge $D \subseteq S^2$, so dass $S^2 \setminus D$ $SO(3)$-paradox ist.

<u>Beweis</u>: Da $F_2 \subseteq SO(3)$ operiert auch F_2 auf S^2. Ist dann $S^2 \setminus D$ F_2-paradox, so ist $S^2 \setminus D$ auch $SO(3)$-paradox?

<u>Dazu</u>: Wähle $D \subseteq S^2$ so, dass $S^2 \setminus D$ ein freier F_2-Raum wird. Dann folgt das Lemma aus Folgerung 2.

Jede Drehung $1 \neq A \in SO(3)$ hat genau eine Drehachse, und diese hat genau 2 Schnittpunkte mit S^2. Da F_2 abzählbar ist, gilt



$$\tilde{D} = \{x \in S^2 \mid Ax = x \text{ für ein } 1 \neq A \in SO(3)\}$$

und $D = F_2 \cdot \tilde{D} = \bigcup_{A \in F_2} A\tilde{D}$ sind abzählbar

Dann ist $S^2 \setminus D$ ein freier F_2-Raum, da alle Fixpunkte für alle $A \in F_2 \setminus \{e\}$ in D liegen? ∎

Satz S^2 ist $SO(3)$-paradox.

Bew: Mit Lemma 3 und Lemma 2 genügt zu zeigen, dass ein $A \in SO(3)$ ex. mit

$$D \cap A^n D = \emptyset \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei dazu l eine Drehachse für S^2 mit $l \cap D = \emptyset$
[l existiert, da D abzb. aber überabzb. viele Achsen existieren.]
Sei $A_\varphi \in SO(3)$ die Drehung um l mit Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Beh $\exists \varphi \in [0,2\pi)$ mit $A_\varphi^n(D) \cap D = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dazu Für jedes Paar $(c,d) \in D \times D$ ex. höchstens ein $r \in [0,2\pi)$ mit $A_r c = d$ (mit A_r Drehung um l mit Winkel r), und dann ex. höchstens abzb. viele $r \in [0,2\pi)$ mit

$$A_r^n c = d \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Da $D \times D$ abzählbar ist, ex. höchstens abzb. viele $r \in [0,2\pi)$ mit

$$A_r^n(D) \cap D \neq \emptyset \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Da aber $[0,2\pi)$ überabzählbar ist, ex. ein φ wie in der Behauptung! $\boxtimes$

Wir sind nun bereit für den Beweis von

Satz (Banach-Tarski) $B = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist G_3-paradox.

Bew: Sei $\tilde{B} = B \setminus \{0\}$. Dann gilt $(0,1] \times S^2 \sim \tilde{B}$ vermöge $(r,x) \mapsto r \cdot x$. Die Wirkung von $SO(3)$ auf $\tilde{B}$ überträgt sich auf $(0,1] \times S^2$

via $A(r,x) = (r, Ax)$, $A \in SO(3)$.

Es ist dann sofort klar, dass eine $SO(3)$-paradoxe Zerlegung

$$C \sim_{SO(3)} S^2 \sim_{SO(3)} S^2 \setminus C$$

eine paradoxe Zerlegung

$$(0,1] \times C \sim_{SO(3)} \underbrace{(0,1] \times S^2}_{= \tilde{B}} \sim_{SO(3)} (0,1] \times (S^2 \setminus C)$$

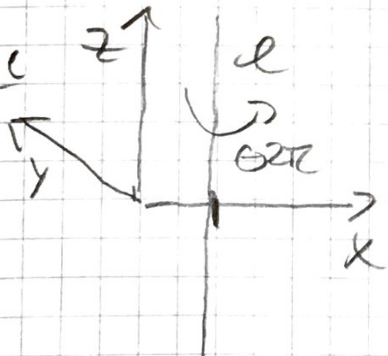
impliziert. Also ist $\tilde{B}$ $SO(3)$-paradox, und dann auch G_3-paradox, da $SO(3) \subseteq G_3$.

Wir zeigen nun $\tilde{B} = B \setminus \{0\} \sim_{G_3} B$. Dann folgt die Beh. mit Lemma 1.

Wähle dazu $\theta \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ und def. $\tau \in G_3$ als Drehung mit Winkel $\theta 2\pi$ mit Drehachse

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Skizze:



Dann folgt $\tau^n(0) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 2 folgt dann $\tilde{B} = B \setminus \{0\} \sim_{G_3} B$. ∎