EINIGE GRUNDLAGEN DER MENGENTHEORETISCHEN TOPOLOGIE

SIEGFRIED ECHTERHOFF

In diesem kurzen Skript wollen wir die wichtigsten Grundlagen der mengentheoretischen Topologie, die insbesondere in der Funktionalanalysis benötigt werden, vorstellen. Wir gehen davon aus, dass alle Leser bereits in der Analysis mit einigen Begriffen der Topologie in Berührung gekommen sind, und dass zumindest die entsprechenden Begriffe in metrischen Räumen wohlbekannt sind.

1. Topologische Räume

Für eine Menge X bezeichne $\mathcal{P}(X)$ stets die Potenzmenge von X, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Ein System $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Topologie* auf X, wenn τ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $\emptyset, X \in \tau$.
(2) $U_1, \ldots, U_n \in \tau \quad \Longrightarrow \quad U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.
(3) Ist $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$, I beliebige Indexmenge, so gilt auch $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

Ist τ eine Topologie auf X, so heißt (X, τ) ein *topologischer Raum*. Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so heißt $U \subseteq X$ *offen*, wenn $U \in \tau$, und $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen* wenn $X \setminus A \in \tau$.

Bemerkung 1.2. (1) Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so besitzt die Menge $\mathfrak{a}$ der abgeschlossenen Teilmengen von X die folgenden Eigenschaften:

(1) $\emptyset, X \in \mathfrak{a}$.
(2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{a} \quad \Longrightarrow \quad A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{a}$.
(3) Gilt $A_i \in \mathfrak{a}$ für alle $i \in I$, so folgt $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathfrak{a}$.

Dies folgt sofort aus den Definitionen. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen das (1),…,(3) erfüllt, so ist $\tau = \{X \setminus A : A \in \mathfrak{a}\}$ eine Topologie auf X.

(2) Ist (X, τ) ein topologischer Raum und ist $B \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X, so heißt

$$\overline{B} := \bigcap\{A : B \subseteq A \subseteq X, A \text{ ist abgeschlossen}\}$$

der *Abschluss* von B in X. Per Konstruktion ist $\overline{B}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die B enthält. Die Menge $\partial B := \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$ heißt der *Rand* von B und $B^\circ := B \setminus \partial B$ heißt das *Innere* von B. B° ist die größte offene Menge, die in B enthalten ist.

(3) Ist $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik auf X, so heißt eine Teilmenge $U \subseteq X$ offen, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$, wobei $U_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. Die Menge τ der offenen Teilmengen von X ist dann eine Topologie auf X. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, wollen wir metrische Räume immer mit der durch die Metrik definierten Topologie versehen. Insbesondere wollen wir in der Regel $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der durch $d(x, y) = |x - y|$ definierten Topologie versehen.

(4) Ist X eine beliebige Menge, so sind die *grobe Topologie* $\tau_{\text{grob}} := \{\emptyset, X\}$ und die *diskrete Topologie* $\tau_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ Topologien auf X. Sind τ_1, τ_2 zwei beliebige Topologien auf X, so sagen wir τ_1 ist *gröber* als τ_2 (oder auch τ_2 ist *feiner* als τ_1), wenn $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Für jede Topologie τ auf X gilt natürlich $\tau_{\text{grob}} \subseteq \tau \subseteq \tau_{\text{discret}}$.

(5) Ist $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, so ist

$$\tau_S := \bigcap \{\tau : \tau \text{ ist Topologie auf } X \text{ mit } S \subseteq \tau\}$$

eine Topologie auf X. τ_S heißt die *von S erzeugte Topologie* auf X. τ_S ist die gröbste Topologie auf X die S enthält.

Übung 1.3. (a) Beschreiben Sie alle möglichen Topologien auf dem Raum $X = \{0, 1, 2\}$.

(b) Sei $X := \{0, 1, 2, 3\}$ und sei $S := \big\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}\big\}$. Bestimmen Sie die von S erzeugte Topologie τ_S auf X.

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff einer Umgebung:

Definition 1.4. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x, falls eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U$ und $U \subseteq V$. Ein System $\mathcal{U}_x$ von Teilmengen von X heißt *Umgebungsbasis* von $x \in X$, falls gilt:

(1) Für alle $U \in \mathcal{U}_x$ gilt: U ist Umgebung von x.

(2) Ist V eine beliebige Umgebung von x, so existiert ein $U \in \mathcal{U}_x$ mit $U \subseteq V$.

Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \tau$ heißt *Basis* von τ, falls für jede offene Teilmenge W von X gilt:

$$W = \bigcup \{U : U \in \mathcal{U} \text{ und } U \subseteq W\}$$

(in Worten: Jede offene Teilmenge von X ist Vereinigung von Elementen in $\mathcal{U}$).

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \tau$ heißt *Subbasis* von τ, falls die Menge

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}} := \{U_1 \cap \cdots \cap U_l : U_1, \ldots, U_l \in \mathcal{S}\}$$

(also die Menge aller endlichen Schnitte von Elementen in $\mathcal{S}$) eine Basis von τ ist.

Wir sagen (X, τ) erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, falls jedes Element $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ besitzt. (X, τ) erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls τ eine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung 1.5. **(a)** Erfüllt (X, τ) das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt (X, τ) auch das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn ist $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis von τ und ist $x \in X$, so ist $\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von X. Ferner gilt: (X, τ) erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn τ eine abzählbare Subbasis $\mathcal{S}$ besitzt.

(b) Ist $x \in X$, so ist $\mathcal{U}_x := \{U \in \tau : x \in U\}$ stets eine Umgebungsbasis von x. Insbesondere kann man immer eine Umgebungsbasis aus offenen Mengen finden (wir sagen dann, dass $\mathcal{U}_x$ eine *offene* Umgebungsbasis von x ist).

(c) Jeder metrische Raum (X, d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn ist $x \in X$, so ist zum Beispiel ist $\mathcal{U}_x := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x.

Übung 1.6. **(a)** Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und sei τ die zugehörige Topologie. Zeigen Sie, dass τ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Sei (X, τ) ein topologischer Raum der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeigen Sie, dass jedes $x \in X$ eine **offene** abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ besitzt.

(c) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn U Umgebung von allen Elementen $x \in U$ ist.

2. Konvergenz von Folgen und Netzen

Definition 2.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ist dann $x \in X$, so sagen wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* x (Bez. $x_n \to x$), falls zu jeder Umgebung V von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in V$ für alle $n \geq N$. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so heißt x *Grenzwert* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so stimmt obige Definition der Konvergenz mit der aus der Analysis bekannten Definition überein.

Übung 2.2. **(a)** Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U}_x$ eine beliebige Umgebungsbasis von $x \in X$. Überlegen Sie: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert genau dann gegen x, wenn zu jedem $V \in \mathcal{U}_x$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in V$ für alle $n \geq N$.

(b) Sei $X = \{-1, 0, 1\}$ und sei $\tau = \{\emptyset, X, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{0\}\}$. Zeigen Sie: Ist $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x_n \to x$ für alle $x \in \{-1, 0, 1\}$. Eine Folge kann also im allgemeinen viele verschiedene Grenzwerte besitzen!

Definition 2.3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann heißt (X, τ) *hausdorffsch* (oder T_2), falls zu jedem Paar $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 existieren mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. In kurzen Worten: je zwei unterschiedliche Punkte lassen sich durch disjunkte Umgebungen trennen.

Übung 2.4. Überlegen Sie:

(a) Jeder metrische Raum (X, d) ist hausdorffsch.

(b) Ist (X, τ) hausdorffsch, und ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X, so besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert.

Aus der Analysis wissen wir, dass man in metrischen Räumen mit Hilfe von konvergenten Folgen viele wichtige Eigenschaften, etwa Stetigkeit von Abbildungen oder Abgeschlossenheit von Mengen charakterisieren kann. Dies funktioniert auch in beliebigen topologischen Räumen wenn diese das erste Abzählbarkeitaxiom erfüllen. Ist dies nicht der Fall (und in vielen wichtigen Fällen ist diese Bedingung verletzt), so muss man Folgen durch Netze ersetzen:

Definition 2.5. Eine nichtleere Menge Λ heißt *gerichtet*, falls eine Relation "$\leq$" auf Λ existiert mit

(1) $\lambda_1 \leq \lambda_2$ und $\lambda_2 \leq \lambda_3 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 \leq \lambda_3$;
(2) Zu jedem Paar $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existiert ein $\mu \in \Lambda$ mit $\lambda_1 \leq \mu$ und $\lambda_2 \leq \mu$.

Ist (X, τ) ein topologischer Raum, Λ eine gerichtete Menge und $x_\lambda \in X$ für alle $\lambda \in \Lambda$, so heißt $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein *Netz* in X. Ist dann $x \in X$, so sagen wir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ konvergiert gegen x (Bez. $x_\lambda \to x$), falls zu jeder Umgebung V von x ein $\lambda_0 \in \Lambda$ existiert mit $x_\lambda \in V$ für alle $\lambda \geq \lambda_0$.

Beispiel 2.6. **(a)** Jede Folge ist ein Netz und die Konvergenzbegriffe stimmen überein.

(b) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ versehen mit der üblichen Relation $\leq$ bilden eine gerichtete Menge. Ist also $x_t \in X$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist $(x_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein Netz in X.

Übung 2.7. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U}_x$ eine beliebige Umgebungsbasis von $x \in X$. Für $U, V \in \mathcal{U}_x$ definieren wir

$$U \leq V \iff U \supseteq V.$$

Ferner sei für alle $V \in \mathcal{U}_x$ ein $x_V \in V$ gewählt. Zeigen Sie: $(x_V)_{V \in \mathcal{U}_x}$ ist ein Netz in X mit $x_V \to x$.

Wie in Übung 2.4 sieht man, dass Netze in hausdorffschen Räumen höhstens einen Grenzwert besitzen können. Es gilt sogar:

Lemma 2.8. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) *X ist hausdorffsch.*
(2) *Jedes konvergente Netz in X besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis. Es genügt (2) $\Rightarrow$ (1) zu zeigen. Sei also (2) erfüllt. Ist X nicht hausdorffsch, so existieren $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so dass für jede Umgebung V von x und für jede Umgebung U von y gilt, dass $U \cap V \neq \emptyset$. Sei nun $\mathcal{U}_x$ eine Umgebungsbasis von x und sei $\mathcal{U}_y$ eine Umgebungsbasis von y. Setze

$$\Lambda := \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y \quad \text{mit} \quad (V_1, U_1) \leq (V_2, U_2) :\Leftrightarrow V_1 \supseteq V_2 \text{ und } U_1 \supseteq U_2.$$

Nach dem oben gesagten exitiert zu jedem $\lambda = (V, U) \in \Lambda$ ein Element $x_\lambda \in V \cap U$, und dann gilt mit Übung 2.7, dass $x_\lambda \to x$ und $x_\lambda \to y$. Dies ist ein Widerspruch zu (2). $\square$

Erfüllt im obigen Lemma (X, τ) das erste Abzählbarkeitsaxiom, so kann man überall Netze durch Folgen ersetzen (warum?). Ähnliches gilt für:

Lemma 2.9. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ist dann $A \subseteq X$, so sind äquivalent:*

(1) *A ist abgeschlossen.*
(2) *Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein beliebiges Netz in A mit $x_\lambda \to x$ für ein $x \in X$, so gilt $x \in A$.*

Übung 2.10. Beweisen Sie das obige Lemma und überprüfe Sie auch die folgende Aussage: Ist $B \subseteq X$ beliebig, so gilt

$$x \in \overline{B} \iff \text{es existiert ein Netz } (x_\lambda)_\lambda \text{ in } B \text{ mit } x_\lambda \to x.$$

Im Prinzip kann man mit Netzen genauso wie mit Folgen arbeiten. Der Begriff einer Teilfolge wird hierbei durch den Begriff eines Teilnetzes ersetzt:

Definition 2.11. Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X. Ein *Teilnetz* $(x_{\lambda_\mu})_{\mu \in M}$ besteht aus einer gerichteten Menge M zusammen mit einer Abbildung $M \to \Lambda; \mu \to \lambda_\mu$, so dass

(1) $\mu_1 \leq \mu_2 \Longrightarrow \lambda_{\mu_1} \leq \lambda_{\mu_2}$.
(2) Für jedes $\lambda_0 \in \Lambda$ existiert ein $\mu \in M$ mit $\lambda_0 \leq \lambda_\mu$.

Bemerkung 2.12. Ähnlich wie für Teilfolgen sieht man leicht ein, dass ein Teilnetz eines konvergenten Netzes wieder konvergent ist, und dass dieses dann gegen denselben Grenzwert konvergiert. Aufpassen muss man nur an einer Stelle: Ein Teilnetz einer Folge ist im allgemeinen keine Teilfolge! Als Beispiel sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Sei $M = [1,\infty)$ versehen mit der üblichen Ordnung $\leq$. Dann ist M eine gerichtete Menge und die Abbildung $t \mapsto n_t := [t]$ (wobei wir mit $[t]$ die Gaußklammer von t bezeichnen) erfüllt die Punkte (1) und (2) der obigen Definition. Damit ist also $(x_{n_t})_{t\in[1,\infty)}$ ein Teilnetz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Stetige und offene Abbildungen

Definition 3.1. Seien (X,τ_X) und (Y,τ_Y) topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(1) f heißt *stetig im Punkt* $x \in X$, falls für jede Umgebung U von $f(x)$ gilt, dass $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist.
(2) f heißt *stetig*, falls $f^{-1}(U) \in \tau_X$ für alle $U \in \tau_Y$ (Urbilder offener Mengen sind offen).
(3) f heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig sind. Die topologischen Räume X und Y heißen *homöomorph*, wenn ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert.
(4) f heißt *offen*, falls $f(V) \in \tau_Y$ für alle $V \in \tau_X$ (Bilder offener Mengen sind offen).
(5) f heißt *abgeschlossen*, falls für alle abgeschlossenen Teilmengen $B \subseteq X$ gilt, dass $f(B)$ in Y abgeschlossen ist (Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

Bemerkung 3.2. Sind zwei topologische Räume homöomorph, so haben Sie in Bezug auf Konvergenz, Stetigkeit von Funktionen, etc., die gleichen Eigenschaften. Im Sinne der Topologie sind diese Räume dann als "gleich" anzusehen.

Ein wichtiges Anliegen der algebraischen Topologie ist die Untersuchung der Frage, wann zwei gegebene topologische Räume homöomorph sind. Im allgemeinen ist diese Frage nicht einfach zu beantworten. Wers nicht glaubt, kann ja mal versuchen ein einfaches Argument dafür zu finden, dass $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist (bezüglich beliebiger Norm-Topologien), wenn $n \neq m$.

Übung 3.3. Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden elementaren Aussagen:

(a) f ist stetig genau dann, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

(b) f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist in X (Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

(c) Ist f bijektiv, so gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist ein Homöomorphismus } &\iff f \text{ ist stetig und offen} \\ &\iff f \text{ ist stetig und abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Lemma 3.4. *Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume, sei $x \in X$ und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig in x.*

(2) *Für jedes Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in X mit $x_\lambda \to x$ gilt $f(x_\lambda) \to f(x)$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $x_\lambda \to x$ und sei U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig in x ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und es existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in f^{-1}(U)$ für alle $\lambda \geq \lambda_0$. Aber dann folgt $f(x_\lambda) \in U$ für alle $\lambda \geq \lambda_0$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Es gelte nun (2) und wir nehmen an, dass f in x nicht stetig ist. Dann existiert eine Umgebung U von $f(x)$, so dass $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von x ist. Es folgt: Ist $\mathcal{U}_x$ eine beliebige Umgebungsbasis von x, so existiert für jedes $V \in \mathcal{U}_x$ ein $x_V \in V \setminus f^{-1}(U)$. Aber dann gilt $x_V \to x$ (siehe Übung 2.7) und $f(x_V) \not\to f(x)$. Dies widerspricht (2). $\square$

Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so kann man im obigen Lemma Netze durch Folgen ersetzen. Ein ähnliches, allerdings etwas komplizierteres Kriterium kann man für die Offenheit einer surjektiven Abbildung formulieren:

Lemma 3.5. *Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist offen.*

(2) *Für jedes Netz $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in Y mit $y_\lambda \to f(x)$ für ein $x \in X$ existiert ein Teilnetz $(y_{\lambda_\mu})_{\mu \in M}$ und Elemente $x_\mu \in X$ mit $x_\mu \to x$ und $f(x_\mu) = y_{\lambda_\mu}$ für alle $\mu \in M$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei f offen und seien (y_λ) und x wie in (2). Sei $\mathcal{U}_x$ eine offene Umgebungsbasis von x. Für jedes $V \in \mathcal{U}_x$ ist dann $f(V)$ offene Umgebung von $f(x)$, und damit existiert ein $\lambda_V \in \Lambda$ mit $y_\lambda \in f(V)$ für alle $\lambda \geq \lambda_V$. Wir setzen

$$M := \{(\lambda, V) : \lambda \geq \lambda_V\} \subseteq \Lambda \times \mathcal{U}_x \quad \text{und} \quad (\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ und } V_1 \supseteq V_2.$$

Dann ist M eine gerichtete Menge und für jedes $\mu = (\lambda, V) \in M$ setze $\lambda_\mu = \lambda$. Dann gilt $y_{\lambda_\mu} \in f(V)$ für $\mu = (\lambda, V) \in M$ und damit existiert ein $x_\mu \in V$ mit $f(x_\mu) = y_{\lambda_\mu}$ für alle μ. Nach Konstruktion gilt dann $x_\mu \to x$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Es gelte nun (2) und wir nehmen an, dass ein offenes $V \subseteq X$ existiert, so dass $f(V)$ nicht offen ist. Dann existiert ein $x \in V$, so dass für jede Umgebung U von $f(x)$ ein $y_U \in U$ existiert mit $y_U \notin f(V)$. Durchläuft U eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_{f(x)}$ von $f(x)$, so gilt $y_U \to f(x)$. Nach (2) existiert nun ein Teilnetz $(y_{U_\mu})_\mu$ und ein Netz $(x_\mu)_\mu$ mit $f(x_\mu) = y_{U_\mu}$ und $x_\mu \to x$. Da V eine Umgebung von x ist, existiert ein μ_0 mit $x_\mu \in V$ für alle $\mu \geq \mu_0$. Dann folgt aber $y_{U_\mu} = f(x_\mu) \in f(V)$ für alle $\mu \geq \mu_0$, und damit ein Widerspruch. □

Übung 3.6. **(a)** Sei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der Einheitskreisring in $\mathbb{C}$ versehen mit der von $\mathbb{C}$ eingeschränkten Metrik, und sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}; \varphi(t) = \exp(2\pi i t)$. Zeigen Sie, dass φ stetig und offen ist.

(b) Zeigen Sie: $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}; \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist ein Homöomorphismus.

4. Einige Konstruktionen topologischer Räume

Wir wollen nun einige Konstruktionen angeben, wie man aus gegebenen topologischen Räumen neue topologische Räume konstruieren kann. Die einfachste Konstruktion ist hierbei das Einschränken der Topologie auf Teilmengen:

Definition 4.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X. Setze $\tau_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$. Dann heißt τ_A die von τ *eingeschränkte Topologie* auf A (oft auch *Spurtopologie* oder die von τ *induzierte Topologie* auf A genannt).

Es ist leicht zu überprüfen, dass τ_A tatsächlich eine Topologie auf A ist. Für die eingeschränkte Topologie gelten die folgenden offensichtlichen Tatsachen:

(1) Ist $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in A und ist $x \in A$, so gilt $x_\lambda \to x$ bezüglich τ genau dann, wenn $x_\lambda \to x$ bezüglich τ_A.
(2) Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist auch die *Einschränkung* $f|_A : A \to Y$ stetig (wir definieren $f|_A(x) := f(x)$ für $x \in A$).
(3) Ist $\mathcal{U}_x$ eine Umgebungsbasis von $x \in A$ bezüglich τ, so ist $\{V \cap A : V \in \mathcal{U}_x\}$ eine Umgebungsbasis von x bezüglich τ_A.

Als nächstes wollen wir Produkträume untersuchen. Sei dazu $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei (X_i, τ_i) ein topologischer Raum. Der Produktraum $\prod_{i\in I} X_i$ besteht aus allen "I-Tupeln" $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in X_i$.

Definition 4.2. Seien (X_i, τ_i) topologische Räume für $i \in I$ und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum. Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller Teilmengen $U \subseteq X$ der Form

$$U = \prod_{i\in I} U_i, \quad \text{mit } U_i \in \tau_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I.$$

Die *Produkttopologie* auf X ist die von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie τ auf X.

Übung 4.3. Seien $X = \prod_{i\in I} X_i$ und $\mathcal{U}$ wie oben. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{U}$ ist eine Basis der Produkttopologie τ.

(b) Sei

$$\mathcal{S} := \{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i\ \forall i \in I \text{ und es ex. ein } i_0 \in I \text{ mit } U_i = X_i \text{ für alle } i \neq i_0\}.$$

Dann ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ.

(c) Sei $p_i : X \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, die alle p_i stetig macht. Genauer: Alle p_i sind stetig, und ist $\tilde{\tau}$ eine beliebige Topologie auf X, so dass alle $p_i : X \to X_i$ stetig sind bezüglich $\tilde{\tau}$, so folgt $\tau \subseteq \tilde{\tau}$.

(d) Alle Projektionen $p_i : X \to X_i$ sind offen.

(e) Ein Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn $p_i(x_\lambda) \to p_i(x)$ für alle $i \in I$.

(f) (Universelle Eigenschaft der Produkttopologie) Ist (Y, σ) ein topologischer Raum und ist $f : Y \to X$ eine Abbildung, so gilt

$$f : Y \to X \text{ ist stetig } \iff p_i \circ f : Y \to X_i \text{ ist stetig für alle } i \in I.$$

Beispiel 4.4. **(a)** Sei $\mathbb{R}^{[0,1]} := \prod_{t\in[0,1]} \mathbb{R}$. Dann können wir $\mathbb{R}^{[0,1]}$ mit der Menge aller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ via $f \mapsto (f(t))_{t\in[0,1]}$ identifizieren. Es folgt dann sofort aus Teil (e) der obigen Übung, dass eine Folge $((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ von Funktionen (bzw. ein Netz $(f_\lambda)_\lambda$) genau dann in der Produkttopologie gegen ein f konvergiert, wenn $f_n(t) \to f(t)$ für alle $t \in [0,1]$ (bzw. $f_\lambda(t) \to f(t)$ für alle $t \in [0,1]$). Konvergenz in der Produkttopologie ist in diesem Fall also gerade die punktweise Konvergenz.

(b) Man beachte, dass die Projektionen $p_i : X \to X_i$ im allgemeinen nicht abgeschlossen sind: Als Beispiel diene die Menge $A := \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Man prüft leicht nach, dass $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, dass aber $p_1(A)$ nicht abgeschlossen ist in $\mathbb{R}$ wenn p_1 die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet.

Übung 4.5. **(a)** Sei $\mathbb{R}^{[0,1]}$ wie oben. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{[0,1]}$ nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Zeigen Sie: Ist I abzählbar und ist $X = \prod_{i \in I} X_i$, so dass alle X_i das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, so erfüllt auch X das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Eine andere wichtige Konstruktion ist die Konstruktion des Quotientenraumes nach einer Äquivalenzrelation. Ist "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf X, und bezeichnet $Y := X/\sim$ den Quotientenraum $\{[x] : x \in X\}$ aller Äquivalenzklassen von X, so ist natürlich $q : X \to Y; q(x) := [x]$ eine surjektive Abbildung (q heißt dann die Quotientenabbildung). Ist umgekehrt Y beliebig und $q : X \to Y$ eine beliebige surjektive Abbildung, so wird durch $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow q(x_1) = q(x_2)$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert, so dass die Abbildung $\tilde{q} : X/\sim \to Y; \tilde{q}([x]) := q(x)$ bijektiv wird. Insofern sind Quotientenräume von X bis auf kanonische Bijektionen nichts anderes als Bildräume von surjektiven Abbildungen auf X.

Definition 4.6. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $q : X \to Y$ surjektiv. Sei $\sigma \subseteq \mathcal{P}(Y)$ definiert durch

$$U \in \sigma :\Longleftrightarrow q^{-1}(U) \in \tau.$$

Dann heißt σ die *Quotiententopologie* auf Y.

Es ist leicht zu sehen, dass σ tatsächlich eine Topologie auf Y ist, und es folgt sofort aus der Definition von σ, dass die Quotientenabbildung $q : X \to Y$ dann immer stetig ist.

Lemma 4.7. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, sei $q : X \to Y$ surjektiv und sei Y versehen mit der Quotiententopologie σ. Ist dann (Z, ρ) ein weiterer topologischer Raum und ist $f : Y \to Z$ eine beliebige Abbildung, so gilt*

$$f : Y \to Z \text{ ist stetig} \iff f \circ q : X \to Z \text{ ist stetig.}$$

Beweis. Wir wollen mal ausnahmsweise wieder den leichten Beweis geben: Die Richtung "$\Rightarrow$" ist klar, da Hintereinanderausführungen stetiger Abbildungen stetig sind. Ist umgekehrt $q \circ f$ stetig, so ist $q^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ q)^{-1}(V)$ offen in X wenn V offen ist in Z. Per Definition von σ ist dann aber $f^{-1}(V)$ offen in Y wenn V offen ist in Z. Also ist f stetig. □

Übung 4.8. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $q : X \to Y$ surjektiv. Zeigen Sie: die Quotiententopologie σ auf Y bezüglich $q : X \to Y$ ist die *feinste* Topologie auf Y, bezüglich der die Quotientenabbildung $q : X \to Y$ stetig ist. Genauer: ist $q : X \to Y$ stetig bezüglich σ und ist $\tilde{\sigma}$ eine beliebige Topologie auf Y, so dass $q : X \to Y$ stetig ist bezüglich $\tilde{\sigma}$, so gilt $\tilde{\sigma} \subseteq \sigma$.

Bemerkung 4.9. Die Produkttopologien und die Quotiententopologien sind tatsächlich Spezialfälle von sehr allgemeinen Konstruktionen von Topologien. Diese sind

(1) (Initialtopologie) Für $i \in I$ seien (X_i, τ_i) topologische Räume. Ferner sei X eine beliebige Menge und es seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Die *Initialtopologie* auf X bezüglich (X_i, τ_i, f_i), $i \in I$, ist die gröbste Topologie auf X, die alle Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stetig macht.

(2) (Finaltopologie) Seien wieder (X_i, τ_i) topologische Räume, sei Y eine Menge und seien $q_i : X_i \to Y$ Abbildungen. Die *Finaltopologie* auf Y bezüglich (X_i, τ_i, q_i) ist die feinste Topologie auf Y bezüglich der alle Abbildungen $q_i : X_i \to Y$ stetig sind.

Ist $X = \prod_{i \in I} X_i$, so ist die Produkttopologie auf X gerade die Initialtopologie bezüglich der Projektionen $p_i : X \to X_i$ und ist $q : X \to Y$ surjektiv, so ist die Quotiententopologie auf Y die Finaltopologie bezüglich der einen Abbildung $q : X \to Y$.

Übung 4.10. (a) Beschreiben Sie Subbasen der Initial- und der Finaltopologien.

(b) Zeigen Sie: Ist τ die Initialtopologie auf X bezüglich (X_i, τ_i, f_i), $i \in I$, so gilt:

$$f : Z \to X \text{ ist stetig} \iff f_i \circ f : Z \to X_i \text{ ist stetig für alle } i \in I.$$

(c) Zeigen Sie: Ist σ die Finaltopologie auf Y bezüglich (X_i, τ_i, q_i), $i \in I$, so gilt

$$f : Y \to Z \text{ ist stetig} \iff f \circ q_i : X_i \to Z \text{ ist stetig für alle } i \in I.$$

5. Zusammenhang und Wegzusammenhang

Definition 5.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(1) X heißt *zusammenhängend*, falls gilt: Sind $U, V \subseteq X$ zwei beliebige offene Teilmengen von X mit $U \cap V = \emptyset$ und $X = U \cup V$, so folgt $X = U$ oder $X = V$.

(2) X heißt *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. γ heißt dann *Weg von x nach y*.

(3) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt*zusammenhängend* (bzw. *wegzusammenhängend*), falls A bezüglich der eingeschränkten Topologie zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) ist.

Bemerkung 5.2. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und ist $A \subseteq X$, so ist A genau dann zusammenhängend, wenn gilt: Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap V \cap A = \emptyset$ und $A \subseteq U \cup V$, so folgt $A \cap U = \emptyset$ oder $A \cap V = \emptyset$ (letztere Bedingung ist dann äquivalent zu $A \subseteq U$ oder $A \subseteq V$).

Beispiel 5.3. Ist X versehen mit der diskreten Topologie τ_{diskret} und besitzt X mindestens zwei Elemente, so ist X nicht zusammenhängend. Denn, ist $x \in X$, so sind $\{x\}$ und $X \setminus \{x\}$ nichtleere offene Teilmengen von X.

Zum Begriff des Wegzusammenhangs bearbeiten Sie bitte die folgende leichte

Übung 5.4. Zeigen Sie:

(a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist I wegzusammenhängend. ($I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Intervall*, falls für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $[x, y] \subseteq I$.)

(b) Ist $[a, b]$ ein beliebiges kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und ist $\varphi : [a, b] \to X$ stetig mit $\varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$, so existiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

(c) Existiert ein Weg von x nach y, so existiert auch ein Weg von y nach x.

(d) Existieren Wege von x nach y und von y nach z, so existiert auch ein Weg von x nach z.

(e) Die Relation

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es existiert ein Weg von } x \text{ nach } y$$

ist eine Äquivalenzrelation auf X.

Satz 5.5. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gelten:*

(1) *Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend und gilt $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend. Insbesondere ist auch $\overline{A}$ zusammenhängend.*

(2) *Sind $A_i \subseteq X$ zusammenhängend für alle $i \in I$, und ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.*

(3) *Sind $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ zusammenhängend mit $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $1 \leq i < n$, so ist auch $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ zusammenhängend.*

(4) *Ist X zusammenhängend, und ist $f : X \to Y$ stetig, so ist auch $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.*

Ferner gilt: Die Aussagen (2) – (4) sind auch richtig wenn wir überall zusammenhängend durch wegzusammenhängend ersetzen.

Beweis. (1) Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap V \cap B = \emptyset$ und $B \subseteq U \cup V$, so folgt auch $U \cap V \cap A = \emptyset$ und $A \subseteq U \cup V$. Da A zusammenhängend ist folgt $U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$. Sei o.B.d.A. $U \cap A = \emptyset$. Dann gilt $A \subseteq X \setminus U$, und dann gilt auch $B \subseteq \overline{A} \subseteq X \setminus U$, da $X \setminus U$ abgeschlossen ist. Also ist B zusammenhängend.

(2) Seien $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ und $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq U \cup V$. Dann gelten auch $U \cap V \cap A_i = \emptyset$ und $A_i \subseteq U \cup V$ für alle $i \in I$, und da alle A_i zusammenhängend sind, folgt für jedes $i \in I$, dass $A_i \subseteq U$ oder $A_i \subseteq V$. Annahme: Es existieren $i, j \in I$ mit $A_i \subseteq U$ und $A_j \subseteq V$. Dann gilt $\emptyset \neq A_i \cap A_j \subseteq U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$, was nicht sein kann. Damit folgt $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq U$ oder $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq V$ und $\bigcup_{i \in I} A_i$ ist zusammenhängend.

(3) Folgt mit (2) und Induktion nach n.

(4) Sind $U, V \subseteq Y$ offen mit $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ und $f(X) \subseteq U \cup V$, so sind $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ offen in X mit $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ und $X \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Da X zusammenhängend ist folgt $X \subseteq f^{-1}(U)$ oder $X \subseteq f^{-1}(V)$. Dann gilt aber $f(X) \subseteq U$ oder $f(X) \subseteq V$.

Die Beweise von (2) – (4) für Wegzusammenhang anstelle von Zusammenhang lassen wir als einfache Übungsaufgabe. □

Satz 5.6. *Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.*

Beweis. **(a)** Wir zeigen zunächst, dass $[a, b]$ für $a < b$ zusammenhängend ist. Seien dazu $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $U \cap V \cap [a, b] = \emptyset$ und $[a, b] \subseteq U \cup V$. Sei o.B.d.A. $[a, b] \cap U \neq \emptyset$. Wir zeigen dann, dass $[a, b] \subseteq U$. Wegen $[a, b] \cap U = [a, b] \setminus V$ ist $[a, b] \cap U$ abgeschlossen. Sei nun

$$s := \sup\{t \in [a, b] : [a, t] \subseteq [a, b] \cap U\}.$$

Da $[a, b] \cap U$ abgeschlossen ist folgt $[a, s] \subseteq [a, b] \cap U$.

Annahme: $s \neq b$. Wegen $s \in U$ und U offen existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $[s, s+\varepsilon] \subseteq [a, b] \cap U$, und dann gilt auch $[a, s + \varepsilon] = [a, s] \cup [s, s + \varepsilon] \subseteq [a, b] \cap U$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von s. Es folgt $s = b$ und $[a, b] \subseteq U$.

(b) Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und sei $x \in I$. Dann gilt

$$I = \bigcup_{\substack{y \leq x \\ y \in I}} [y, x] \cup \bigcup_{\substack{x \leq y \\ y \in I}} [x, y]$$

und mit (a) und Teil (2) von Satz 5.5 folgt dann, dass I zusammenhängend ist.

(c) Sei nun umgekehrt $M \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend. Sind dann $x, y \in M$ mit $x < y$, so gilt $[x, y] \subseteq M$, denn wäre $z \in [x, y] \setminus M$, so wäre $M \subseteq (-\infty, z) \cup (z, \infty)$ aber $M \cap (-\infty, z) \neq \emptyset$ und $M \cap (z, \infty) \neq \emptyset$. Dann wäre M aber nicht zusammenhängend! □

Als einfache Folgerung der Sätze 5.5 und 5.6 erhält man insbesondere den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen:

Folgerung 5.7. *Sei (X, τ) zusammenhängend und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ein Intervall.*

Als weitere Folgerung der Sätze 5.5 und 5.6 erhalten wir

Folgerung 5.8. *Ist (X, τ) wegzusammenhängend, so ist (X, τ) zusammenhängend.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ fest. Für jedes $y \in X$ wähle einen Weg $\gamma_y : [0, 1] \to X$ von x_0 nach y. Dann folgt $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0, 1])$. Nach Teil (4) von Satz 5.5 zusammen mit Satz 5.6 ist $\gamma_y([0, 1])$ zusammenhängend für alle $y \in X$, und da $x \in \bigcap_{y \in X} \gamma_y([0, 1])$ folgt dann mit Teil (2) von Satz 5.5, dass X zusammenhängend ist. □

Übung 5.9. (a) Zeigen Sie:

(1) Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so ist C wegzusammenhängend.
(2) Ist $n > 1$, so ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend.
(3) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$ ist wegzusammenhängend.
(4) Ist $n > 1$, so ist $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$. (Nutze (2).)

(b) Sei $X := \{(t, \sin(\frac{1}{t})) : t \in (0, 1]\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: X ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend.

Wir wollen noch ohne Beweis den folgenden Satz erwähnen:

Satz 5.10. *Seien (X_i, τ_i), $i \in I$, topologische Räume und sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Dann gilt*

$$X \text{ ist (weg-)zusammenhängend} \iff \text{alle } X_i \text{ sind (weg-)zusammenhängend.}$$

Wir kommen nun zum Begriff der Zusammenhangskomponente:

Definition 5.11. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $x \in X$.

(1) $K(x) := \bigcup\{A \subseteq X : A \text{ ist zusammenhängend}, x \in A\}$ heißt *Zusammenhangskomponente* von x in X. X heißt *total unzusammenhängend* wenn $K(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$.

(2) $K_W(x) := \bigcup\{A \subseteq X : A \text{ ist wegzusammenhängend}, x \in A\}$ heißt *Wegkomponente* von x in X.
(3) X heißt *lokal zusammenhängend* (bzw. *lokal wegzusammenhängend*), falls für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine (weg-)zusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subseteq U$ existiert.

Übung 5.12. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Zeigen Sie

(1) $K(x)$ ist zusammenhängend und abgeschlossen.
(2) $K_W(x)$ ist wegzusammenhängend.
(3) Finden Sie einen topologischen Raum (X, τ) und ein $x \in X$, so dass $K_W(x)$ nicht abgeschlossen ist.
(4) Ist $\tau = \tau_{\text{diskret}}$ die diskrete Topologie, so ist X total unzusammenhängend.
(5) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n \subseteq \mathbb{R}^2$ die Strecke von $(0,1)$ nach $(\frac{1}{n}, 0)$, und sei $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Zeigen Sie: X ist wegzusammenhängend, aber X ist nicht lokal zusammenhängend.

Bemerkung 5.13. Es folgt sofort aus Teil (2) von Satz 5.5 und aus Teil (1) und (2) der Übung, dass $K(x) \cap K(y) \neq \emptyset \Rightarrow K(x) = K(y)$ (bzw. $K_W(x) \cap K_W(y) \neq \emptyset \Rightarrow K_W(x) = K_W(y)$). Damit ist insbesondere die Relation $x \sim y \Leftrightarrow y \in K(x)$ (bzw. $x \sim y \Leftrightarrow y \in K_W(x)$) eine Äquivalenzrelation auf X.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch den folgenden Satz beweisen:

Satz 5.14. *Sei X lokal zusammenhängend (bzw. lokal wegzusammenhängend). Dann besitzt jedes $x \in X$ eine offene Umgebungsbasis aus (weg-)zusammenhängenden Mengen.*

Für den Beweis benötigen wir

Lemma 5.15. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, so dass jedes $x \in X$ eine (weg-)zusammenhängende Umgebung besitzt. Dann ist $K(x)$ (bzw. $K_W(x)$) offen und abgeschlossen in X.*

Beweis. **(a)** Sei $y \in K(x)$ und sei U eine zusammenhängende Umgebung von y. Da $y \in K(x) \cap U$ ist $K(x) \cap U$ zusammenhängend, und damit ist $U \subseteq K(x)$. Also ist $K(x)$ offen. Nach Teil (1) von Übung 5.12 ist $K(x)$ auch abgeschlossen.

(b) Sei nun X so, dass jedes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Wie oben folgt dann, dass $K_W(x)$ offen ist. Aber dann ist $X \setminus K_W(x) = \bigcap_{y \notin K_W(x)} K_W(y)$ auch offen, und damit ist $K_W(x)$ abgeschlossen. $\square$

Bemerkung 5.16. Ist (X,τ) ein topologischer Raum, so dass jedes $x\in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt, so gilt $K(x)=K_W(x)$ für alle $x\in X$. Da $K_W(x)$ immer eine Teilmenge von $K(x)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $K(x)\subseteq K_W(x)$. Aber: nach obigem Lemma gilt $K(x)\subseteq K_W(x)\cup\big(X\setminus K_W(x)\big)$ mit $K_W(x)$ und $X\setminus K_W(x)$ offen in X. Da $K(x)$ zusammenhängend und da $x\in K(x)\cap K_W(x)$ folgt $K(x)\subseteq K_W(x)$.

Beweis von Satz 5.14. Setze $\mathcal{U}_x:=\{V\subseteq X: x\in V, V \text{ offen und zusammenhängend}\}$. Ist dann U eine beliebige offene Umgebung von x, so ist auch U lokal zusammenhängend. Nach Lemma 5.15 ist die Zusammenhangskomponente $K^U(x)$ von x in U offen in U (und dann auch in X). Damit ist $K^U(x)\in\mathcal{U}_x$ mit $K^U(x)\subseteq U$.

Der Beweis für lokal wegzusammenhängende Räume X geht völlig analog. □

6. Kompakte Räume

Die Definition kompakter Räume ist völlig analog zur üblichen Definition von Kompaktheit in metrischen Räumen.

Definition 6.1. Sei (X,τ) ein topologischer Raum und sei $K\subseteq X$. Ist $\{U_i: i\in I\}$ ein System offener Teilmengen von X mit $K\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$, so heißt $\{U_i : i\in I\}$ eine *offene Überdeckung* von K. Ist $\{U_i : i\in I\}$ eine offene Überdeckung von K und sind $i_1,\ldots,i_l\in I$ mit $K\subseteq U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_l}$, so heißt $U_{i_1},\ldots,U_{i_l}$ eine *endliche Teilüberdeckung* der Überdeckung $\{U_i: i\in I\}$.

K heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung 6.2. Sehr häufig wird bei der Definition von kompakten Mengen zusätzlich gefordert, dass K bezüglich der eingeschränkten Topologie hausdorffsch ist. Ein nicht-hausdorffscher Raum K der die obige Definition erfüllt heißt dann üblicherweise *quasi-kompakt*. Wir wollen diese Unterscheidung hier nicht vornehmen.

Übung 6.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und sei $\{A_i : i\in I\}\subseteq\mathcal{P}(X)$ für $X\neq\emptyset$. Wir sagen: $\{A_i: i\in I\}$ hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, falls für je endlich viele $i_1,\ldots,i_l\in I$ gilt, dass $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_l}\neq\emptyset$.

Zeigen Sie: Ein topologischer Raum (X,τ) ist genau dann kompakt, wenn für jedes System $\{A_i : i\in I\}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit endlicher Durchschnittseigenschaft gilt: $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$.

Wir wollen nun eine Reihe von wichtigen Tatsachen über kompakte Räume formulieren.

Lemma 6.4. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gelten*

(1) *Ist (X, τ) hausdorffsch und ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K abgeschlossen.*
(2) *Ist $K \subseteq X$ kompakt und ist $A \subseteq K$ abgeschlossen (in K), so ist auch A kompakt.*
(3) *Ist $f : X \to Y$ stetig und ist $K \subseteq X$ kompakt, so auch ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt.*
(4) *Sind $K_1, \dots, K_l \subseteq X$ kompakt, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{l} K_i$ kompakt.*
(5) *$K \subseteq X$ ist genau dann kompakt , wenn K versehen mit der eingeschränkten Topologie kompakt ist.*
(6) *Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.*
(7) *Eine Teilmenge K eines endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraums X ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Bis auf (7) sind alle Aussagen sehr leicht zu beweisen. Zur Anschauung zeigen wir (1), (2) und (3) und und lassen (4), (5) und (6) zur Übung. Für (7) verweisen wir auf die üblichen Analysis-Vorlesungen.

(1) Wir zeigen: $X \setminus K$ ist offen. Sei dazu $x \in X \setminus K$. Da X hausdorffsch existieren zu jedem $y \in K$ offene Umgebungen V_y von x und U_y von y mit $V_y \cap U_y = \emptyset$. Wegen $K = \bigcup_{y \in K} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y$ ist $\{U_y : y \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $y_1, \dots, y_l \in K$ mit $K \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_l}$. Setzen wir dann $V := V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_l}$, so ist V eine offene Umgebung von X mit $V \cap K = \emptyset$. Damit ist $X \setminus K$ offen (siehe Übung 1.6).

(2) Nach (5) gilt o.B.d.A. $K = X$. Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A, so ist $\{U_i : i \in I\} \cup (K \setminus A)$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $i_1, \dots, i_l \in I$ mit $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l} \cup (K \setminus A)$, aber dann folgt $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l}$ und A ist kompakt.

(3) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so ist $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt, existieren $i_1, \dots, i_l \in I$ mit $K \subseteq f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_l})$, und dann folgt $f(K) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l}$. □

Beispiel 6.5. sei $X = \{0, 1, 2\}$ mit der Topologie $\tau = \big\{\emptyset, X, \{0\}, \{0, 1\}\big\}$. Dann ist $K := \{0\}$ kompakt in X, aber K ist nicht abgeschlossen in X.

Übung 6.6. Sei (X, τ) ein kompakter topologischer Raum und sei (Y, σ) ein T_2-Raum. Ferner sei $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie

(1) $f : X \to Y$ ist abgeschlossen.
(2) Ist f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Genauso wie im üblichen Satz von Bolzano-Weierstraß für metrische Räume, kann man Kompaktheit von Mengen mit Hilfe von konvergenten Netzen charakerisieren:

Satz 6.7. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $K \subseteq X$. Genau dann ist K kompakt, wenn gilt: Jedes Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in K besitzt ein Teilnetz $(x_{\lambda_\mu})_\mu$ mit $x_{\lambda_\mu} \to x$ für ein $x \in K$.*

Beweis. Wegen Teil (5) von Lemma 6.4 gilt o.B.d.A., dass $K = X$. Sei also zunächst X kompakt und sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Für $\lambda \in \Lambda$ setzen wir $A_\lambda := \overline{\{x_{\lambda'} : \lambda' \geq \lambda\}}$. Dann hat $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, da für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \Lambda$ ein $\lambda_0 \in \Lambda$ existiert mit $\lambda_0 \geq \lambda_1, \ldots, \lambda_l$, und dann gilt $\emptyset \neq A_{\lambda_0} \subseteq A_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A_{\lambda_l}$. Da X kompakt, folgt mit Übung 6.3, dass $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.

Sei nun $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Wir konstruieren nun ein Teilnetz $(x_{\lambda_\mu})_\mu$ von $(x_\lambda)_\lambda$ mit $x_{\lambda_\mu} \to x$. Sei dazu $\mathcal{U}_x$ die Menge aller offenen Umgebungen von x. Wir setzen

$$M := \{(\lambda, U) \in \Lambda \times \mathcal{U}_x : x_\lambda \in U\} \quad \text{mit} \quad (\lambda, U) \leq (\lambda', U') \ \Leftrightarrow \lambda \leq \lambda' \text{ und } U \supseteq U'.$$

Dann ist M eine gerichtete Menge, denn sind $(\lambda_1, U_1), (\lambda_2, U_2) \in M$, so wähle $\lambda' \in \Lambda$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \leq \lambda'$. Da $U := U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von x und da $x \in \overline{\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda'\}}$, existiert ein $\lambda \geq \lambda'$ mit $x_\lambda \in U$. Dann folgt $(\lambda_i, U_i) \leq (\lambda, U)$ für $i = 1, 2$, und M ist gerichtet.. Setzen wir nun $\lambda_\mu = \lambda$ fur $\mu = (\lambda, U) \in M$, so gilt $x_{\lambda_\mu} \to x$.

Besitze nun umgekehrt jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz. Sei $\mathcal{A}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit endlicher Durschnittseigenschaft, und sei $\mathcal{B} := \{\bigcap_{i=1}^r A_i : A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}\}$ die Menge aller endlichen Schnitte von Elementen in $\mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und es genügt zu zeigen, dass $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B \neq \emptyset$.

Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ definiere $B_1 \leq B_2 \ \Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2$. Dann ist $\mathcal{B}$ gerichtet ($B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$). Für alle $B \in \mathcal{B}$ wähle $x_B \in B$. Dann ist $(x_B)_{B\in\mathcal{B}}$ ein Netz in X, und nach Voraussetzung besitzt $(x_B)_B$ ein Teilnetz $(x_{B_\mu})_\mu$ mit $x_{B_\mu} \to x$ für ein $x \in X$. Es folgt $x \in B$ für alle $B \in \mathcal{B}$, denn für festes $B \in \mathcal{B}$ wähle $\mu \in M$ mit $B_\mu \geq B$, d.h. $B_\mu \subseteq B$. Dann folgt $x_{B_{\mu'}} \in B_{\mu'} \subseteq B_\mu \subseteq B$ für alle $\mu' \geq \mu$ und dann auch $x \in B$, da B abgeschlossen ist. □

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir nun den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Satz 6.8 (Satz von Tychonov)**.** *Seien (X_i, τ_i) topologische Räume und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Dann gilt: X ist genau dann kompakt, wenn alle X_i, $i \in I$, kompakt sind.*

Das mit X auch alle X_i kompakt sind folgt direkt aus der Stetigkeit der Projektionen $p_i : X \to X_i$ und aus Teil (3) von Lemma 6.4. Die Umkehrung ist dagegen etwas schwerer, und beruht auf dem Lemma von Zorn, das wir nun zunächst erklären wollen.

Definition 6.9. Eine Menge $\mathcal{M} \neq \emptyset$ heißt *geordnet*, falls eine Relation "$\leq$" auf $\mathcal{M}$ existiert mit

(1) $x \leq x$ für alle $x \in \mathcal{M}$,
(2) $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$ für alle $x, y \in \mathcal{M}$, und
(3) $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$ für alle $x, y, z \in \mathcal{M}$.

Ist $\mathcal{M}$ geordnet, so heißt eine Teilmenge $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ eine *Kette*, falls für alle $x, y \in \mathcal{K}$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ eine Kette, so heißt $z \in \mathcal{M}$ eine *obere Schranke* von $\mathcal{K}$, falls $x \leq z$ für alle $x \in \mathcal{K}$. Ein Element $z \in \mathcal{M}$ heißt *maximales Element* von $\mathcal{M}$, falls für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt: $x \geq z \implies x = z$.

Vorsicht! Ein maximales Element z in $\mathcal{M}$ ist in der Regel kein größtes Element von $\mathcal{M}$, d.h. es gilt in der Regel **nicht**, dass $x \leq z$ für alle $x \in \mathcal{M}$. Ist zum Beispiel

$$\mathcal{M} := \{(s,0) : s \in [0,1]\} \cup \{(0,t) : t \in [0,1]\} \quad \text{mit} \quad (s,t) \leq (s',t') \Leftrightarrow s \leq s' \text{ und } t \leq t',$$

so sind $(1,0)$ und $(0,1)$ maximale Elemente in $\mathcal{M}$, aber $\mathcal{M}$ besitzt kein größtes Element!

Satz 6.10 (Lemma von Zorn)**.** *Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine geordnete Menge, so dass jede Kette $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}$ eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ eine maximales Element.*

Man kann zeigen, dass das Lemma von Zorn äquivalent zum Auswahlaxiom ist — wir wollen darauf aber nicht näher eingehen.

Beweis des Satzes von Tychonov. Seien (X_i, τ_i) kompakt für alle $i \in I$ und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Sei $\mathcal{A}$ ein System von abgeschlossenen Teilmengen von X, das die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Wir wollen zeigen, dass $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Mit Übung 6.3 folgt dann, dass X kompakt ist.

Wir setzen

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{F} \text{ hat die endl. Durchschnittseigenschaft}\}.$$

Dann ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$ (da $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$), und mit $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ wird $\mathcal{M}$ eine geordnete Menge. Ist $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{M}$, so ist $\tilde{\mathcal{F}} := \cup_{\mathcal{F} \in \mathcal{K}} \mathcal{F}$ eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}$, und damit besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element $\mathcal{F}_0$.

Wir wollen nun zeigen, dass $\bigcap_{B\in\mathcal{F}_0}\overline{B}\neq\emptyset$. Da $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}_0$ und da alle $A\in\mathcal{A}$ abgeschlossen sind, gilt dann auch $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A\neq\emptyset$ und wir sind fertig.

$\mathcal{F}_0$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Ist $D\subseteq X$, so dass $\mathcal{F}_0\cup\{D\}$ die endliche Durchschittseigenschaft besitzt, so gilt $D\in\mathcal{F}_0$ (dies gilt, da $\mathcal{F}_0$ maximal in $\mathcal{M}$).

(ii) Sind $B_1,\dots,B_l\in\mathcal{F}_0$, so ist auch $B_1\cap\dots\cap B_l\in\mathcal{F}_0$ (folgt aus (i) angewandt auf $D=B_1\cap\dots\cap B_l$).

Sei nun $i\in I$. Wir setzen $\mathcal{F}_i:=\{\overline{p_i(B)}:B\in\mathcal{F}_0\}$. Sind $B_1,\dots,B_l\in\mathcal{F}_0$, so gilt

$$\bigcap_{j=1}^{l}\overline{p_i(B_j)}\supseteq p_i\left(\bigcap_{j=1}^{l}B_j\right)\neq\emptyset,\quad \text{da}\ \bigcap_{j=1}^{l}B_j\neq\emptyset.$$

Also erfüllt jedes $\mathcal{F}_i$ die endliche Durchschnittseigenschaft, und da alle X_i kompakt sind, folgt $C_i:=\bigcap_{B\in\mathcal{F}_0}\overline{p_i(B)}\neq\emptyset$ für alle $i\in I$.

Sei nun $x_i\in C_i$ für alle $i\in I$. Wir zeigen, dass $x:=(x_i)_{i\in I}\in\overline{B}$ für alle $B\in\mathcal{F}_0$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $U\cap B\neq\emptyset$ für jede offene Umgebung U von x. Nach Konstruktion der Produkttopologie gilt o.B.d.A., dass U von der Form $U=\prod_{i\in I}U_i$ ist, mit $U_i\subseteq X_i$ offen, $x_i\in U_i$ für alle $i\in I$, und $U_i=X_i$ für $i\notin\{i_1,\dots,i_l\}$, wobei $\{i_1,\dots,i_l\}$ eine geeignete endliche Teilmenge von I ist. Für $j=1,\dots,l$ setze nun

$$D_j:=p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})=\prod_{i\in I}W_i\quad\text{mit } W_i=X_i \text{ für } i\neq i_j \text{ und } W_{i_j}=U_{i_j}.$$

Dann gilt $D_j\in\mathcal{F}_0$ für alle $1\leq j\leq l$, denn sind $B_1,\dots,B_r\in\mathcal{F}_0$, so gilt mit Eigenschaft (ii), dass $\bigcap_{k=1}^{r}B_k\in\mathcal{F}_0$. Hieraus folgt, dass $x_{i_j}\in C_{i_j}\subseteq\overline{p_{i_j}\left(\bigcap_{k=1}^{r}B_k\right)}$, und dann, dass $U_{i_j}\cap p_{i_j}\left(\bigcap_{k=1}^{r}B_k\right)\neq\emptyset$, da U_{i_j} eine offene Umgebung von x_{i_j}. Damit folgt auch $D_j\cap\bigcap_{k=1}^{r}B_k=p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})\cap\bigcap_{k=1}^{r}B_k\neq\emptyset$ und $\mathcal{F}_0\cup\{D_j\}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft. Eigenschaft (i) impliziert dann $D_j\in\mathcal{F}_0$. Wegen $U=\bigcap_{k=1}^{r}D_j$ folgt nun für alle $B\in\mathcal{F}_0$: $U\cap B=\bigcap_{k=1}^{r}D_j\cap B\neq\emptyset$, und der Beweis des Satzes ist damit vollständig. □

7. Lokalkompakte Räume

Definition 7.1. Sei (X, τ) ein topologischer T_2-Raum. X heißt *lokalkompakt*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ aus kompakten Mengen besitzt.

Beispiel 7.2. Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ sei $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \varepsilon\}$. Dann ist $\mathcal{B}_x := \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von x aus kompakten Mengen. Also ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ lokalkompakt.

Bemerkung 7.3. Sei (X, τ) ein T_2-Raum. Dann sind äquivallent

(1) X ist lokalkompakt.
(2) Für jedes $x \in X$ und für jede offene Umgebung U von x existiert eine offene Umgebung V von x mit $\overline{V}$ kompakt und $\overline{V} \subseteq U$.

(2) $\Rightarrow$ (1) ist klar. Ist umgekehrt X lokalkompakt und ist U offene Umgebung von x, so existiert zunächst eine kompakte Umgebung W von x mit $W \subseteq U$. Da W Umgebung von x existiert $V \subseteq X$ offen mit $x \in V \subseteq W$. Da $\overline{V}$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge W ist, ist $\overline{V}$ kompakte Teilmenge von U.

Satz 7.4. *Sei (X, τ) ein kompakter T_2-Raum. Dann ist X auch lokalkompakt.*

Beweis. Sei $x \in X$ und sei U eine offene Umgebung von x. Dann ist $K := X \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge X, und damit ist K auch kompakt. Da X hausdorffsch existieren zu jedem $y \in K$ offene Umgebungen V_y von x und W_y von y mit $V_y \cap W_y = \emptyset$. Dann ist $\{W_y : y \in K\}$ eine offene Überdeckung von K, und da K kompakt ist, existieren $y_1, \ldots, y_l \in K$ mit $K \subseteq W := \cup_{i=1}^l W_{y_i}$. Setze $V := \cap_{i=1}^l V_{y_i}$. Dann ist V eine offene Umgebung von x mit $\overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus K = U$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge X ist $\overline{V}$ auch kompakt. $\square$

Bemerkung 7.5. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $x \in A \subseteq X$. Sei τ_A die von τ eingeschränkte Topologie auf A. Dann gilt: $V \subseteq A$ ist Umgebung von x bezüglich τ_A genau dann, wenn eine Umgebung W von x bezüglich τ existiert mit $V = A \cap W$.

Insbesondere folgt: Ist A selbst eine Umgebung von x bezüglich τ, so ist jede τ_A-Umgebung $V \subseteq A$ von x auch eine τ-Umgebung von x (da endliche Schnitte von Umgebungen wieder Umgebungen sind).

Aus Satz 7.4 und Bemerkung 7.5 folgt nun sehr leicht:

Folgerung 7.6. *Ein hausdorffscher Raum (X, τ) ist genau dann lokalkompakt, wenn jedes $x \in X$ eine (lokal-)kompakte Umgebung besitzt.*

Beispiel 7.7. Ein hausdorffscher Raum (X, τ) heißt *lokal euklidisch*, falls zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, ein $\varepsilon > 0$, ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to U_\varepsilon(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_2 < \varepsilon\}$ mit $\varphi(x) = 0$ existieren.

Es gilt: Jeder lokal euklidische Raum (X, τ) ist lokalkompakt, denn $\varphi^{-1}(B_{\varepsilon/2}(0))$ ist eine kompakte Umgebung von x. Insbesondere ist jede reelle (hausdorffsche) differenzierbare Mannigfaltigkeit lokalkompakt.

Man kann zeigen: Ist X ein ∞-dimensionaler normierter Raum, so ist $B_\varepsilon(0)$ nicht kompakt wenn $\varepsilon > 0$. Da jede Umgebung von 0 in X eine abgeschlossene Kugel $B_\varepsilon(0)$ enthält, besitzt 0 keine kompakte Umgebung und X ist nicht lokalkompakt.

Allgemein gilt für beliebige metrische Räume (X, d): X ist genau dann lokalkompakt, wenn zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x)$ kompakt.

In lokalkompakten Räumen kann man immer disjunkte kompakte und abgeschlossene Teilmengen durch offene Mengen trennen.

Satz 7.8. *Seien (X, τ) lokalkompakt, $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq X$ offen mit $K \subseteq U$. Dann existiert eine offene Teilmenge V von X mit $\overline{V}$ kompakt und $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Beweis. Zu jedem $x \in K$ existiert nach Bemerkung 7.3 eine offene Umgebung V_x von x mit $\overline{V}_x$ kompakt und $\overline{V}_x \subseteq U$. Da K kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_l \in K$ mit $K \subseteq V := \cup_{i=1}^{l} V_{x_i}$. Dann ist V offen mit $\overline{V} \subseteq \cup_{i=1}^{l} \overline{V}_{x_i} \subseteq U$ kompakt. □

Folgerung 7.9. *Seien (X, τ) lokalkompakt, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $K \cap A = \emptyset$. Dann existieren offene Mengen $V, W \subseteq X$ mit $K \subseteq V$, $A \subseteq W$ und $V \cap W = \emptyset$.*

Beweis. Setze $U := X \setminus A$. Ist dann V wie in Satz 7.8, so setze $W = X \setminus \overline{V}$. □

Bemerkung 7.10. Wir wollen nun der Frage nachgehen, welche Teilmengen $Y \subseteq X$ versehen mit der eingeschränkten Topologie τ_Y wieder lokalkompakt sind. Wir sehen sofort:

(a) Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, und ist W eine kompakte Umgebung von $x \in A$ bezüglich τ, so ist $W \cap A$ eine kompakte Umgebung von x bezüglich τ_A. Also ist A lokalkompakt.

(b) Ist $U \subseteq X$ offen, und ist $x \in U$, so existiert eine kompakte Umgebung W von x bezüglich τ mit $W \subseteq U$. Mit Bemerkung 7.5 ist W dann aber auch eine kompakte Umgebung von x bezüglich τ_U. Damit ist U lokalkompakt.

(c) Kombiniert man (a) und (b), so folgt, dass jede Teilmenge $Y \subseteq X$, mit $Y = A \cap U$ für ein $A \subseteq X$ abgeschlossen und ein $U \subseteq X$ offen, wieder lokalkompakt ist. Umgekehrt gilt:

Satz 7.11. *Sei (X, τ) ein lokalkompakter Raum und sei $Y \subseteq X$. Dann ist (Y, τ_Y) genau dann lokalkompakt, wenn eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und eine offene Menge $U \subseteq X$ existieren mit $Y = A \cap U$.*

Beweis. Sei $Y \subseteq X$ lokalkompakt. Sei zunächst Y dicht in X (also $\overline{Y} = X$). Wir zeigen dann, dass Y in X offen ist.

Da Y lokalkompakt ist, existiert zu jedem $y \in Y$ eine bezüglich τ_Y offene Umgebung V_y von y mit $\overline{V}_y^Y$ (der Abschluss von V_y in Y) kompakt. Da X hausdorffsch, und da Kompaktheit von $\overline{V}_y^Y$ nur von der eingeschränkten Topologie auf $\overline{V}_y^Y$ abhängt (siehe Lemma 6.4), ist $\overline{V}_y^Y$ abgeschlossen in X, also $\overline{V}_y^Y = \overline{V}_y$. Sei nun W_y offen in X mit $V_y = W_y \cap Y$. Dann gilt

$$W_y \setminus V_y = W_y \setminus Y \subseteq W_y \setminus \overline{V}_y \subseteq W_y \setminus V_y.$$

Damit ist $U_y := W_y \setminus \overline{V}_y$ offen in X mit $U_y \cap Y = \emptyset$. Da $\overline{Y} = X$ folgt dann aber $U_y = \emptyset$, und damit folgt $W_y = V_y$ für alle $y \in Y$. Dann sind alle V_y und dann auch $Y = \cup_{y \in Y} V_y$ offen in X.

Sei nun $Y \subseteq X$ eine beliebige lokalkompakte Teilmenge. Dann ist Y offen in $\overline{Y}$, und damit existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \cap \overline{Y} = Y$. □

Beispiel 7.12. Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der durch $|\cdot|$ induzierten Topologie. Dann ist $\mathbb{Q}$ nicht lokalkompakt, denn $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, aber $\mathbb{Q}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Satz 7.13. *Seien X lokalkompakt und Y hausdorffsch. Existiert eine stetige, offene und surjektive Abbildung $f : X \to Y$, so ist auch Y lokalkompakt.*

Beweis. Sei $y \in Y$ und sei $x \in X$ mit $f(x) = y$. Ist dann $V \subseteq X$ offene Umgebung von x mit $\overline{V}$ kompakt, so ist $f(V)$ offene Umgebung von y (da f offen) mit $\overline{f(V)} \subseteq f(\overline{V})$ kompakt (da f stetig). Also ist $\overline{f(V)}$ eine kompakte Umgebung von y. □

Übung 7.14. Sei (X_i, τ_i), $i \in I$, eine Familie topologischer Räume, und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ der Produktraum versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

(1) X ist hausdorffsch genau dann, wenn alle X_i hausdorffsch sind.

(2) X ist lokalkompakt genau dann, wenn alle X_i lokalkompakt sind, und wenn endlich viele $i_1, \ldots, i_l \in I$ existieren mit X_i ist kompakt für alle $i \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$.

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff der Einpunktkompaktifizierung eines lokalkompakten Raumes X.

Definition 7.15. Sei X lokalkompakt und sei Y ein kompakter T_2-Raum, so dass eine injektive und stetige Abbildung $f : X \to Y$ existiert mit $Y \setminus f(X) = \{y_0\}$ ist einelementig und $f : X \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus. Dann heißt (Y, f) eine *Einpunktkompaktifizierung* (oder einfach *EPK*) von X.

Wir werden sehr häufig auch sagen, dass Y eine EPK von X ist, wenn eine Abbildung $f : X \to Y$ wie in der Definition existiert.

Satz 7.16. *Sei (X, τ) ein lokalkompakter Raum und sei $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ (disjunkte Vereingung). Definiere $\tilde{\tau} \subseteq \mathcal{P}(\tilde{X})$ durch*

$$\tilde{\tau} = \tau \cup \{\tilde{X} \setminus K : K \subseteq X \text{ ist kompakt}\}.$$

Dann ist $\tilde{\tau}$ eine Topologie auf $\tilde{X}$ und ist $\iota : X \to \tilde{X}$ die kanonische Einbettung, so ist $(\tilde{X}, \iota)$ eine EPK von X. Ferner gilt: Ist (Y, f) eine beliebige EPK von X, so existiert ein Homöomorphismus $\varphi : \tilde{X} \to Y$ mit $\varphi \circ \iota = f$.

Beweis. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $\tilde{\tau}$ eine Topologie auf $\tilde{X}$ ist. Wir zeigen, dass $\tilde{X}$ kompakt ist: Sei dazu $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $\tilde{X}$. Wähle $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$. Dann ist $K := \tilde{X} \setminus U_{i_0}$ eine kompakte Teilmenge von X. Setzen wir $W_i = U_i \setminus \{\infty\}$ für $i \neq i_0$, so ist $\{W_i : i \neq i_0\}$ eine offene Überdeckung von K in X. Da K kompakt ist, existieren $i_1, \ldots, i_l \in I \setminus \{i_0\}$ mit $K \subseteq W_{i_1} \cup \cdots \cup W_{i_l}$, und dann gilt $\tilde{X} \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_l}$.

Nach Definition von $\tilde{\tau}$ gilt $\tilde{\tau}_X = \tau$, und damit ist $\iota : X \to \tilde{X}$ ein Homöomorphismus aufs Bild. Damit ist $(\tilde{X}, \iota)$ eine EPK von X.

Sei nun (Y, f) eine weitere EPK von X und sei $y_0 \in Y$ mit $Y \setminus f(X) = \{y_0\}$. Definiere $\varphi : \tilde{X} \to Y$ durch $\varphi(\iota(x)) = f(x)$ für $x \in X$ und $\varphi(\infty) = y_0$. Dann ist φ bijektiv und stetig in allen Punkten $\iota(x) \in \tilde{X}$. Wir zeigen, dass φ stetig ist im Punkt ∞. Sei dazu $U \subseteq Y$ offen mit $y_0 \in U$. Dann ist $Y \setminus U$ kompakt in $Y \setminus \{y_0\}$, und damit ist $K := f^{-1}(Y \setminus U) = \tilde{X} \setminus \varphi^{-1}(U)$ kompakt in X. Nach Konstruktion von $\tilde{\tau}$ folgt, dass $\varphi^{-1}(U)$ offen ist in $\tilde{X}$.

Damit ist $\varphi : \tilde{X} \to Y$ stetig und bijektiv. Da $\tilde{X}$ kompakt und Y hausdorffsch ist, ist φ dann automatisch ein Homöomorphismus (siehe Übung 6.6). $\square$

Beispiel 7.17. Wir wollen zeigen, dass $S^n := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \|y\|_2 = 1\}$ eine EPK von $\mathbb{R}^n$ ist. Sei dazu $\widetilde{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ wie in Satz 7.16. Wir definieren

$$\varphi : \widetilde{\mathbb{R}^n} \to S^n; \quad \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (0,\dots,0,1), & \text{für } x = \infty \\ \frac{1}{\|x\|_2^2+1}(2x_1,\dots,2x_n,\|x\|_2^2-1), & \text{für } x \neq \infty \end{array} \right\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass φ bijektiv und stetig auf $\mathbb{R}^n \subseteq \widetilde{\mathbb{R}^n}$ ist. Für die Stetigkeit im Punkt ∞ sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x^k \to \infty$. Dies bedeutet, dass $\|x^k\|_2 \to \infty$ im üblichen Sinne (warum?). Dann folgt $\frac{2x_i^k}{\|x^k\|_2^2+1} \to 0$ für $k \to \infty$ und $\frac{\|x^k\|_2^2-1}{\|x^k\|_2^2+1} \to 1$ für $k \to \infty$, und damit ist φ auch stetig in ∞. Da $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ kompakt und S^n hausdorffsch ist, ist $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}^n} \to S^n$ ein Homöomorphismus.

Übung 7.18. (a) Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Abbildung $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}^n} \to S^n$ aus obigem Beispiel.

(b) Zeigen Sie, dass $[0,1]$ eine EPK von $[0,\infty)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ eine EPK von $\mathbb{R}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Kegel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq (1-z)^2\}$ eine EPK des Zylinders $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z, x^2+y^2 \leq 1\}$ ist.

Wir wollen nun zum Abschluss dieses Abschnitts noch untersuchen, welche stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ auf die Einpunktkompaktifizierungen besitzen.

Definition 7.19. Seien X und Y lokalkompakte Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, wenn für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(K)$ eine kompakte Teilmenge von X ist.

Satz 7.20. *Seien X und Y lokalkompakt und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist eigentlich.*

(2) *Die Abbildung* $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}; \tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & \textit{wenn } x \in X \\ \infty, & \textit{wenn } x = \infty \end{array} \right\}$ *ist stetig.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ stetig und sei $K \subseteq Y$ kompakt. Dann ist $U := \tilde{Y} \setminus K$ eine offene Umgebung von ∞ in $\tilde{Y}$ und damit ist $\tilde{f}^{-1}(U) = \tilde{X} \setminus f^{-1}(K)$ offene Umgebung von ∞ in $\tilde{X}$. Nach Definition der Topologie auf $\tilde{X}$ ist dann $f^{-1}(K)$ kompakt in X.

Der Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2) geht ähnlich. $\square$

Übung 7.21. Seien X und Y lokalkompakte Räume und sei $f : X \to Y$ stetig und eigentlich. Dann ist f abgeschlossen, d.h. für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq X$ ist $f(A)$ eine abgeschlosse Teilmenge von Y.

Bemerkung 7.22. In der Natur treten auch viele topologische Räume X auf, in denen zwar jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt, die aber leider nicht hausdorffsch sind. Einen solchen Raum nennt man auch *lokal quasi-kompakt*. Ist zum Beispiel G eine Gruppe, die durch Homöomorphismen $x \mapsto g \cdot x$ auf einem lokalkompakten Raum X operiert, und ist $G \backslash X$ der Quotientenraum von X nach der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists g \in G \text{ mit } y = g \cdot x,$$

so ist $G \backslash X$ stets lokal quasi-kompakt, aber sehr häufig ist dieser Quotientenraum nicht hausdorffsch! Leider gelten viele der Resultate in diesem Abschnitt nicht in der allgemeineren Situation von lokal quasi-kompakten Räumen.

8. Die Sätze von Urysohn, Tietze

In diesem Abschnitt wollen wir komplex-wertige stetige Funktionen auf lokalkompakten Räumen untersuchen. Wir werden unter anderem sehen, dass die Topologie auf einem lokalkompakten Raum X schon vollständig durch die Kenntnis aller (reellen) stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf X festgelegt ist. Diese wichtige Tatsache ist eine direkte Folgerung des Satzes von Urysohn, den wir weiter unten beweisen werden. Neben dem Satz von Urysohn werden wir in diesem Abschnitt auch den Fortsetzungssatz von Tietze und den Dichtheitssatz von Stone-Weierstraß vorstellen. Beide Sätze sind in der allgemeinen Theorie unverzichtbar. Wir starten mit

Notationen 8.1. Sei X ein lokalkompakter Raum. Ist dann $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

der *Träger* (oder auch *support*) von f. Wir sagen: $f : X \to \mathbb{C}$ *verschwindet in* ∞ (oder f *verschwindet im unendlichen*), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ existiert mit $|f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
C(X) &:= \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ ist stetig}\}\\
C_b(X) &:= \{f \in C(X) : f \text{ ist beschränkt}\}\\
C_0(X) &:= \{f \in C(X) : f \text{ verschwindet in } \infty\}\\
C_c(X) &:= \{f \in C(X) : \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt}\}.
\end{aligned}$$

Wir schreiben $C^{\mathbb{R}}(X), C_b^{\mathbb{R}}(X), C_0^{\mathbb{R}}(X)$ und $C_c^{\mathbb{R}}(X)$ für die analog definierten Räume reell-wertiger Funktionen. Ist X kompakt, so ist jede stetige komplex-wertige Funktion f auf X beschränkt (da $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt), und damit stimmen in dieser Situation alle oben definierten Funktionenräume überein. Im allgemeinen gelten die Inklusionen $C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X)$.

Die *Supremumsnorm* (oder auch *Norm der gleichmäßigen Konvergenz*) $\|\cdot\|_\infty$ auf $C_b(X)$ ist definiert durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Wir überlassen es dem Leser nachzuprüfen, dass $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm ist.

Satz 8.2. *Der Vektoraum $C_b(X)$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum, und $C_0(X)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $C_b(X)$. Damit ist auch $C_0(X)$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_b(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann ist auch $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ für jedes $x \in X$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in X$. Ist dann $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon \quad \forall x \in X,\ \forall n, m \ge N.$$

Mit m gegen ∞ folgt $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in X$ und $n \ge N$, und damit $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$.

Es genügt nun zu zeigen, dass $f : X \to \mathbb{C}$ stetig ist. Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Umgebung U von x mit $|f(y) - f(x)| \le \varepsilon$ für alle $y \in U$. Zunächst existiert zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_N - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig ist, existiert eine Umbegung U von x mit $|f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in U$. Aber dann gilt

$$|f(y) - f(x)| \le |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $y \in U$. Also ist $C_b(X)$ vollständig.

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0(X)$ und sei $f \in C_b(X)$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Ist dann $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert zunächst ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_N - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, und da $f_N \in C_0(X)$ existiert ein $K \subseteq X$ kompakt mit $|f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in X \setminus K$, und dann folgt $|f(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Also ist auch $f \in C_0(X)$. □

Bemerkung 8.3. **(a)** Ist X eine beliebige Menge und ist

$$l^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ ist beschränkt}\}$$

der Vektorraum der beschränkten Funktionen auf X, so ist $l^\infty(X)$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dies folgt leicht aus dem ersten Teil des obigen Beweises.

(b) Für den obigen Beweis der Vollständigkeit von $C_b(X)$ wurde an keiner Stelle benutzt, dass X ein lokalkompakter Raum ist. Das entsprechende Resultat gilt daher für jeden beliebigen topologischen Raum X.

Übung 8.4. Zeigen Sie: Ist X ein lokalkompakter Raum und ist $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ die EPK von X, so ist $C_0(X)$ in kanonischer Weise isomtrisch isomorph zu $C_\infty(\tilde{X}) := \{f \in C(\tilde{X}) : f(\infty) = 0\}$, wenn wir beide Räume mit der Supremumsnorm versehen.

Wir kommen nun zum wichtigen Satz von Urysohn in seiner Version für lokalkompakte Räume (siehe auch Bemerkung 8.11).

Satz 8.5 (Urysohn)**.** *Sei X ein lokalkompakter Raum. Seien $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq X$ offen mit $K \subseteq U$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$, *so dass $f|_K \equiv 1$.*

Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir zunächst einige wichtige Folgerungen angeben.

Folgerung 8.6. *Sei X ein lokalkompakter Raum. Dann ist die Topologie auf X durch die Menge der stetigen Funktionen mit kompakten Trägern in eindeutiger Weise festgelegt. Genauer: Ist $A \subseteq X$, so sind äquivalent:*

(1) *A ist abgeschlossen in X.*
(2) *Zu jedem $x \in X \setminus A$ existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$,* $\operatorname{supp}(f)$ *ist kompakt, und $A \cap \operatorname{supp}(f) = \emptyset$.*

Beweis. Für den Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2) wende man den Satz von Urysohn auf $K := \{x\}$ für $x \notin A$ und $U = X \setminus A$ an. Gilt umgekehrt (2) und sind $x \in X \setminus A$ und $f_x : X \to [0,1]$ stetig mit $f_x(x) = 1$ und $\operatorname{supp}(f_x) \cap A = \emptyset$, so ist $X \setminus A = \cup_{x \in X \setminus A} f_x^{-1}\big((0,1]\big)$ offen. □

Folgerung 8.7. *Sei X ein lokalkompakter Raum. Dann ist $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.*

Beweis. Sei $f \in C_0(X)$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass in jeder ε-Kugel um f mit $\varepsilon > 0$ mindestens eine stetige Funktion mit kompaktem Träger zu finden ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f in ∞ verschwindet existiert ein $K \subseteq X$ kompakt mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Nach Urysohn existiert nun eine stetige Funktion $\varphi : X \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt und mit $\varphi|_K \equiv 1$. Ist dann $g := \varphi \cdot f$, so ist $\operatorname{supp}(g) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt und es gilt $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. □

Für den Beweis des Satzes von Urysohn benötigen wir

Lemma 8.8. *Seien X, K und U wie in Satz 8.5. Sei $D := \{\frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq m \leq 2^n\} \subseteq [0,1]$. Dann ist D dicht in $[0,1]$ und zu jedem $t \in D$ existiert eine offene Teilmenge $U_t \subseteq X$ mit:*

(1) *$K \subseteq U_t \subseteq \overline{U_t} \subseteq U$ und $\overline{U_t}$ ist kompakt.*
(2) *Sind $t_1, t_2 \in D$ mit $t_1 < t_2$, so gilt $\overline{U}_{t_1} \subseteq U_{t_2}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $\overline{D} = [0,1]$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $D_n := \{\frac{m}{2^n} : 0 \leq m \leq 2^n\}$. Dann gilt $D_n \subseteq D_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Wir konstruieren nun per Induktion nach n die Mengen U_t für $t \in D_n$ mit den Eigenschaften (1) und (2).[1]

$\mathbf{n = 0}$: Nach Satz 7.8 existiert ein $V \subseteq X$ offen mit $\overline{V}$ kompakt und $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Wenden wir dann Satz 7.8 nochmal auf die kompakte Menge $\overline{V}$ und auf U an, so folgt die Existenz einer offenen Menge $W \subseteq X$ mit $\overline{W}$ kompakt und $\overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Wir setzen dann $U_0 = V$ und $U_1 = W$.

$\mathbf{n \to n+1}$: Für alle $t \in D_n$ sei bereits eine offene Menge U_t gefunden, so dass für die Elemente in D_n die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind. Ist $s \in D_{n+1} \setminus D_n$, so existiert genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k < 2^n$ und $\frac{k}{2^n} < s < \frac{k+1}{2^n}$. Schreiben wir dann $t_1 := \frac{k}{2^n}$ und $t_2 := \frac{k+1}{2^n}$, so folgt aus Bedingung (2), dass $\overline{U}_{t_1}$ eine kompakte Teilmenge der offenen Menge U_{t_2} ist. Nach Satz 7.8 existiert nun eine offene Menge $U_s \subseteq X$ mit $\overline{U}_s$ kompakt und $\overline{U}_{t_1} \subseteq U_s \subseteq \overline{U}_s \subseteq U_{t_2}$. Die so konstruierten Mengen U_t, $t \in D_{n+1}$, erfüllen dann die Bedingungen (1) und (2). $\square$

Beweis von Satz 8.5. Seien $\{U_t : t \in D\}$ wie im Lemma. Wir definieren eine Hilfsfunktion

$$g : X \to [0,1]; \quad g(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ falls } x \in U_t \text{ für alle } t \in D \\ \sup\{t \in D : x \notin U_t\} \text{ sonst} \end{Bmatrix}. \tag{8.1}$$

Es folgt sofort, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in U_0$, da $U_0 \subseteq U_t$ für alle $t \in D$, und wegen $K \subseteq U_0$ folgt dann $g|_K \equiv 0$. Ebenso sehen wir, dass $g(x) = 1$ für alle $x \in X \setminus U_1$. Ist also $f := 1 - g$, so folgt $\mathrm{supp}(f) \subseteq \overline{U}_1 \subseteq U$ ist kompakt und $f|_K \equiv 1$.

Es bleibt zu zeigen, dass g (und dann auch f) stetig ist. Dazu beobachten wir: Für $x \in X$ und $s \in [0,1]$ gilt

(a) $g(x) < s \;\Leftrightarrow\; \exists\, t \in D$ mit $t < s$ und $x \in U_t$.
(b) $g(x) > s \;\Leftrightarrow\; \exists\, t \in D$ mit $t > s$ und $x \notin \overline{U}_t$.

Der Beweis von (a) folgt aus

$$\begin{aligned} g(x) < s \;&\Leftrightarrow\; \sup\{t \in D : x \notin U_t\} < s \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, t_0 \in D \text{ mit } \sup\{t \in D : x \notin U_t\} < t_0 < s \quad (\text{da } \overline{D} = [0,1]) \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, t_0 \in D \text{ mit } t_0 < s \text{ und } x \in U_{t_0} \quad (\text{wegen } U_t \subseteq U_{t_0} \text{ für } t < t_0). \end{aligned}$$

Zum Beweis von (b) sei zunächst $g(x) > s$. Da $\overline{D} = [0,1]$ existieren dann $t_0, t_1 \in D$ mit $\sup\{t \in D : x \notin U_t\} = g(x) > t_0 > t_1 > s$, und dann gilt $x \notin U_{t_0} \supseteq \overline{U}_{t_1}$. Ist

[1] Man beachte, dass die Menge D_{n+1} aus D_n hervorgeht, indem man zu je zwei benachbarten Punkten $t_1 < t_2$ in D_n den Mittelpunkt $\frac{t_1+t_2}{2}$ hinzufügt!

umgekehrt $t_1 \in D$ mit $t_1 > s$ und $x \notin \overline{U}_{t_1}$, so folgt insbesondere, dass $x \notin U_{t_1}$, und damit gilt $g(x) = \sup\{t \in D; x \notin U_t\} \geq t_1 > s$.

Mit (a) und (b) folgt nun für alle $s_1, s_2 \in [0,1]$ mit $s_1 < s_2$, dass

$$g^{-1}\big((s_1,s_2)\big) = g^{-1}\big([0,s_2)\big) \cap g^{-1}\big((s_1,1]\big) = \left(\bigcup_{t<s_2, t\in D} U_t\right) \cap \left(\bigcup_{t>s_1, t\in D} (X \setminus \overline{U}_t)\right),$$

und da alle U_t und $X \setminus \overline{U}_t$ offen sind, ist auch $g^{-1}\big((s_1,s_2)\big)$ offen. □

Eine weitere wichtige Anwendung des Satzes von Urysohn ist:

Satz 8.9 (Partition der Eins). *Sei X lokalkompakt und sei $K \subseteq X$ kompakt. Sind dann $U_1, \ldots, U_l \subseteq X$ offen mit $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_l$, so existieren stetige Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_l : X \to [0,1]$ mit*

(1) $\operatorname{supp}(\varphi_i)$ *ist kompakt und* $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ *für* $i = 1, \ldots, l$;
(2) $\sum_{i=1}^{l} \varphi_i(x) = 1$ *für alle* $x \in K$ *und* $\sum_{i=1}^{l} \varphi_i(x) \leq 1$ *für alle* $x \in X$.

(Das System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ heißt dann "$\{U_1, \ldots, U_l\}$ untergeordnete Partition der Eins von K*".)*

Beweis. Wir beweisen zunächst: Für alle $i \in \{1, \ldots, l\}$ existieren offene Mengen V_i mit $\overline{V}_i$ kompakt und $\overline{V}_i \subseteq U_i$, so dass $K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_l$. Dazu wählen wir zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung V_x mit $\overline{V}_x \subseteq U_i$ falls $x \in U_i$ (dies geht, da X lokalkompakt ist, und da für alle $x \in K$ die Menge $U_x := \cap\{U_i : x \in U_i\}$ eine offene Umgebung von x ist). Da K kompakt ist, existiert eine endliche Menge $F \subseteq K$ mit $K \subseteq \cup_{x\in F} V_x$. Setzen wir dann $V_i = \cup\{V_x : x \in F \cap U_i\}$, so erfüllen die $V_1, \ldots, V_l$ die gewünschten Eigenschaften.

Nach Urysohn existiert zu jedem $i \in \{1, \ldots, l\}$ eine stetige Funktion $\psi_i : X \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$ und mit $\psi_i|_{\overline{V_i}} \equiv 1$. Ist dann $\psi = \sum_{i=1}^{l} \psi_i$, so gilt $\psi(x) \geq 1$ für alle $x \in V := V_1 \cup \cdots \cup V_l$. Da $K \subseteq V$ existiert nach Urysohn eine stetige Funktion $h : X \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp}(h) \subseteq U$ und $h|_K \equiv 1$. Wir setzen dann

$$\varphi_i(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{h(x)\psi_i(x)}{\psi(x)}, & \text{falls } x \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

□

Übung 8.10. Zeigen Sie: Ist X ein lokalkompakter Raum und ist $\{U_i : i \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung von X, so existiert zu jedem $f \in C_c(X)$ eine Familie $\{f_i : i \in I\} \subseteq C_c(X)$ mit $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$, $f_i = 0$ für fast alle $i \in I$, und $f = \sum_{i\in I} f_i$.

Wir werden im folgenden Abschnitt noch eine allgemeinere Konstruktion einer Partition der Eins für nichtkompakte Räume angeben!

Bemerkung 8.11. Der Satz von Urysohn gilt auch in ähnlicher Form für sogenannte T_4-Räume, d.h. für topologische Räume X in denen zu je zwei abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Man beachte: Ein T_4-Raum X muss nicht unbedingt hausdorffsch sein, denn die einpunktigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in X$ müssen nicht unbedingt abgeschlossen sein. Ein T_4-Raum der gleichzeitig hausdorffsch ist heißt *normal*.

Man kann zeigen: Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn zu je zwei abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ eine stetige Funktion $g : X \to [0,1]$ existiert mit $g|_A \equiv 0$ und $g|_B \equiv 1$. Natürlich kann man hier im allgemeinen nicht erwarten, dass der Träger von g kompakt ist. Ist g eine solche Funktion, so werden mit $U := g^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ und $V := g^{-1}\big((\frac{1}{2}, 1]\big)$ disjunkte offene Mengen definiert mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Ist umgekehrt X ein T_4-Raum und sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so kann man wie in Lemma 8.8 mit Hilfe der T_4-Eigenschaft für jedes $t \in D$ eine offene Menge U_t finden, so dass $A \subseteq U_s \subseteq \overline{U}_s \subseteq U_t \subseteq X \setminus B$, falls $s, t \in D$ mit $s < t$. Wie im Beweis von Satz 8.5 gibt Formel (8.1) die gesuchte Funktion $g : X \to [0,1]$.

Übung 8.12. Zeigen Sie:

- **(a)** Jeder kompakte T_2-Raum ist normal.
- **(b)** Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.
- **(c)** Sei $X = \{0, 1, 2\}$. Finden Sie eine nichttriviale Topologie τ auf X, so dass (X, τ) ein nicht-hausdorffscher T_4-Raum ist.

Wir kommen nun zum wichtigen Fortsetzungssatz von Tietze. Wir formulieren ihn für allgemeine T_4-Räume:

Satz 8.13 (Tietze). *Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und sei $r > 0$. Ist dann $g : A \to [-r, r]$ eine stetige Funktion, so existiert eine stetige Funktion $\tilde{g} : X \to [-r, r]$ mit $\tilde{g}|_A = g$.*

Bemerkung 8.14. Man kann den Satz noch schärfer fassen, indem man in der Formulierung des Satzes das Intervall $[-r, r]$ durch ein beliebiges Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ erstetzt. Insbesondere kann die Funktion g dann auch unbeschränkt sein. Wir werden diese allgemeinere Fassung aber nicht benötigen, und daher auch nicht beweisen.

Lemma 8.15. *Seien X, $A \subseteq X$ und $g : A \to [-r, r]$ wie in Satz 8.13. Dann existiert eine Funktion $f : X \to [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ mit $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2r}{3}$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Setze $A_1 := g^{-1}\big([-r, -\frac{r}{3}]\big), A_2 := g^{-1}\big([\frac{r}{3}, r]\big)$. Dann sind A_1, A_2 abgeschlossene Teilmengen von X mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Nach Urysohn existiert eine stetige Funktion $h : X \to [0,1]$ mit $h|_{A_1} \equiv 0$ und $h|_{A_2} \equiv 1$. Für $x \in X$ setze $f(x) = \frac{2r}{3}h(x) - \frac{r}{3}$. Dann ist f stetig mit $f(X) \subseteq [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ und kurzes Nachrechnen zeigt, dass $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2r}{3}$ für alle $a \in A$. ☐

Beweis von Satz 8.13. Wir beweisen den Satz für den Fall $r = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann durch Übergang auf $\frac{1}{r}g$. Wir konstruieren per Induktion nach n eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to [-1, 1]$ mit

(1) $f_n(X) \subseteq \big[-1 + \big(\frac{2}{3}\big)^n, 1 - \big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) $|g(a) - f_n(a)| \leq \big(\frac{2}{3}\big)^n$ für alle $a \in A, n \in \mathbb{N}$.
(3) $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Funktion $f_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ mit den Eigenschaften (1) und (2) existiert nach Lemma 8.15. Sei nun f_n bereits konstruiert. Wir betrachten $h := g - f_n|_A$. Dann ist $h : A \to \mathbb{R}$ stetig, und mit (2) angewandt auf f_n folgt $h(A) \subseteq \big[-\big(\frac{2}{3}\big)^n, \big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$. Lemma 8.15 angewandt auf $h : A \to \big[-\big(\frac{2}{3}\big)^n, \big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ liefert die Existenz einer stetigen Funktion $h_n : X \to \big[-\frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n, \frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ mit $|h_n(a) - h(a)| \leq \big(\frac{2}{3}\big)^{n+1}$ für alle $a \in A$. Setze $f_{n+1} := f_n + h_n$. Kurzes Nachrechnen zeigt dann, dass f_{n+1} die Bedingungen (1),(2) und (3) erfüllt.

Aus (3) folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_b(X)$ ist, denn ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leq \frac{1}{3}\sum_{k=m}^{n-1} \Big(\frac{2}{3}\Big)^k < \varepsilon$$

für alle $n > m \geq N$, da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \big(\frac{2}{3}\big)^k$ konvergiert. Da $C_b(X)$ vollständig ist (siehe Bemerkung 8.3) existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $\|f_n \to f\|_\infty \to 0$. Aus (1) folgt dann, dass $f(X) \subseteq [-1, 1]$, und (2) liefert, dass $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$. ☐

Für komplex-wertige Funktionen erhalten wir durch Anwenden von Satz 8.13 auf Realteil und Imginärteil der Funktion und auf $r = \|g\|_\infty$ das folgende Resultat:

Folgerung 8.16. *Sei X ein T_4-Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und sei $g : A \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f|_A = g$ und $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\|g\|_\infty$.*

Als Anwendung für Funktionen auf lokalkompakten Räumen erhalten wir:

Folgerung 8.17. *Sei X lokalkompakt, sei $K \subseteq X$ kompakt und sei $g : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann existiert ein $f \in C_c(X)$ mit $f|_K = g$ und $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\|g\|_\infty$. Ist g reell mit $g(K) \subseteq [-r, r]$, so kann auch f mit $f(X) \subseteq [-r, r]$ gewählt werden.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $g(K) \subseteq [-r, r]$. Sei $V \subseteq X$ offen mit $K \subseteq V$ und $\overline{V}$ kompakt. Dann ist $\overline{V}$ ein T_4-Raum (siehe Übung 8.12) und nach Satz 8.13 existiert eine stetige Funktion $\tilde{f} : \overline{V} \to [-r, r]$ mit $\tilde{f}|_K = g$. Nach Urysohn existiert ferner eine stetige Funktion $h : X \to [0, 1]$ mit $\mathrm{supp}(h) \subseteq V$ und $h|_K \equiv 1$. Definiere dann

$$f : X \to [-r, r]; \quad f(x) = \left\{\begin{matrix} h(x) \cdot \tilde{f}(x), & \text{falls } x \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix}\right\}.$$

□

Wir beenden die Diskussion um den Satz von Tietze mit:

Folgerung 8.18. *Sei X ein lokalkompakter Raum und sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist die Einschränkungs-Abbildung $C_c(X) \to C_c(A); f \mapsto f|_A$ surjektiv.*

Beweis. Sei $g \in C_c(A)$ und sei $V \subseteq X$ offen mit $\overline{V}$ kompakt und mit $\mathrm{supp}(g) \subseteq V \cap A$. Setze $K = \overline{V} \cap A$. Wie im Beweis von Folgerung 8.17 existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{supp}(f) \subseteq V$ und $f|_K = g|_K$. Aber dann ist $f \in C_c(X)$ mit $f|_A = g$. □

9. Partition der Eins

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Konstruktion einer Partitiion der Eins angeben, die für viele nicht-kompakte Räume funktioniert. Wir definieren zunächst, was wir im allgemeinen Fall unter einer Partition der Eins verstehen wollen:

Definition 9.1. Sei X ein toplogischer Raum und sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Ein System von stetigen Funktionen $\varphi_j : X \to [0, 1]$, $j \in J$ heißt eine $(U_i)_{i \in I}$ *untergeordnete lokal endliche Partition der Eins* von X, falls gelten

(1) Zu jedem $j \in J$ existiert ein $i \in I$ mit $\mathrm{supp}\, \varphi_j \subseteq U_i$,
(2) Zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung V_x von x, so dass $\{j \in J : \mathrm{supp}\, \varphi_j \cap V_x \neq \emptyset\}$ endlich ist, und
(3) für alle $x \in X$ gilt $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = 1$.

Man beachte, dass wegen (2) nur endlich viele Summanden in $\sum_{j \in J} \varphi_j(x)$ ungleich 0 sind!

Bemerkung 9.2. Ein topologischer Raum X heißt *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine lokalendliche Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ besitzt. Das bedeutet:

(1) Zu jedem $j \in J$ existiert ein $i \in I$ mit $V_j \subseteq U_i$, und
(2) zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung V_x, so dass $\{j \in J : V_j \cap V_x \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Ist nun $(\varphi_j)_{j\in J}$ eine lokalendliche $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete Partition der Eins, und setzen wir $V_j = \{y \in X : \varphi_j(y) \neq 0\}$, so folgt aus den Bedingungen (1),(2),(3) in Definition 9.1, dass $(V_j)_{j\in J}$ eine lokalendliche Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$ ist. Ist also X ein topologischer Raum, so dass zu jeder offenen Überdeckung von X eine dieser Überdeckung untergeordnete lokalendliche Partition der Eins existiert, so ist X parakompakt. Man kannauch zeigen, dass für hausdorffsche Räume auch die Umkehrung gilt! Wir wollen im folgenden aber nur den Fall σ-kompakter lokalkompakter Räume betrachten.

Bemerkung 9.3. Ein topologischer Raum heißt *σ-kompakt*, wenn es eine Folge kompakter Teilmengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X gibt mit $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ist X lokalkompakt und erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom (d.h. X besitzt eine abzählbare Basis der Topologie), so ist X auch σ-kompakt. Wir zeigen hierzu, dass wir in diesem Fall eine abzählbare Basis $\mathcal{V}$ der Topologie von X finden können mit $\overline{V}$ kompakt für alle $V \in \mathcal{V}$. Dann folgt $X = \cup_{V\in\mathcal{V}} \overline{V}$ ist abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.

Sei also $\mathcal{U}$ eine beliebige abzählbare Basis des lokalkompakten Raums X. Ist dann $W \subseteq X$ offen und $x \in W$ beliebig, so existiert zunächst eine offene Umgebung V von x mit $\overline{V} \subseteq U$ und $\overline{V}$ kompakt (nutze Satz 7.8). Da $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie ist, existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq V$. Dann folgt $\overline{U} \subseteq \overline{V}$ und $\overline{U}$ ist als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{V}$ kompakt. Damit folgt

$$W = \cup\{U : U \in \mathcal{U}, \overline{U} \subseteq W \text{ und } \overline{U} \text{ kompakt}\}.$$

Da dies für alle offenen Teilmengen W von X gilt, ist auch

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : \overline{U} \text{ kompakt}\}$$

eine abzählbare Basis von X.

Satz 9.4. *Sei X ein lokalkompakter und σ-kompakter Raum. Dann existiert zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine abzählbare $\mathcal{U}$-untergeordnete lokalendliche Partition der Eins $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Diese kann so gewählt werden, dass alle φ_k einen kompakten Träger besitzen.*

Beweis. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Mengen in X mit $\cup_{n\in\mathbb{N}}K_n = X$. Wir konstruieren zunächst eine Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen in X, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\overline{V}_n$ ist kompakt und

$$\cup_{l=1}^n K_n \subseteq V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq V_{n+1}.$$

Nach Satz 7.8 existiert zur kompakten Menge K_1 eine offene Menge V_1 mit $\overline{V}_1$ kompakt und $K_1 \subseteq V_1$. Sind dann $V_1, \ldots, V_n$ bereits gewählt, so wähle zur kompakten Menge $L_n := \overline{V}_n \cup K_{n+1}$ mit Hilfe von Satz 7.8 eine offene Menge V_{n+1} mit $L_n \subseteq V_{n+1}$ und $\overline{V}_{n+1}$ kompakt. Die so konstruierte Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt dann die gewünschten Eigenschaften.

Wir betrachten nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ den offenen "Ring" $W_n := V_{n+1} \setminus \overline{V}_{n-2}$ (wobei wir $V_{-1} = V_0 = \emptyset$ setzen) und den kompakten "Ring" $C_n := \overline{V}_n \setminus V_{n-1} \subseteq W_n$ (da $V_{n-1} \subseteq \overline{V}_n$ offen ist, ist $\overline{V}_n \setminus V_{n-1}$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{V}_n$, also kompakt). Dann gilt $\cup_{n\in\mathbb{N}}W_n = \cup_{n\in\mathbb{N}}C_n = X$ und es gilt $W_n \cap W_k = \emptyset$ für alle $k < n-1$ und $k > n+1$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei dann $\mathcal{U}_n = \{U_{i,n} := U_i \cap W_n : i \in I\}$. Dann ist $\mathcal{U}_n$ eine offene Überdeckung von C_n, und da C_n kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $F_n \subseteq I$ mit $C_n \subseteq \cup_{i\in F_n}U_{i,n}$ Nach dem Satz zur Partition der Eins für kompakte Teilmengen, Satz 8.9, existieren dann Funktionen $\psi_{i,n} \in C_c^+(X)$, $i \in F_n$, mit $\operatorname{supp}\psi_{i,n} \subseteq U_{i,n} \subseteq U_i$ und $\sum_{i\in F_n}\psi_{i,n}(x) = 1$ für alle $x \in C_n$. Sei nun $J = \{(i,n) : n \in \mathbb{N}, i \in F_n\}$. Dann ist J als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar!

Wir zeigen, dass das System $\{\psi_{i,n} : (i,n) \in J\}$ lokal endlich ist. Sei dazu $x \in X$ beliebig. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in W_n$. Dann folgt

$$\operatorname{supp}\psi_{i,k} \cap W_n \subseteq U_{i,k} \cap W_n \subseteq W_k \cap W_n = \emptyset$$

für alle $(i,k) \in J$ mit $k < n-1$ und $k > n+1$. Es folgt $\operatorname{supp}\psi_{i,k} \cap W_n \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $(i,k) \in J$.

Sei nun $\psi = \sum_{(i,k)\in J}\psi_{i,k}(x)$. Dann ist ψ wohldefiniert und stetig, denn auf der jeder offenen Menge W_n ist ψ durch die endliche Summe $\psi = \sum_{k=n-1}^{n+1}\sum_{i\in F_k}\psi_{i,k}$ von stetigen Funktionen gegeben. Ferner gilt $\psi(x) \geq 1$ für alle $x \in X$, denn ist $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in C_n$, so folgt $\psi(x) \geq \sum_{i\in F_n}\psi_{i,n}(x) = 1$. Definieren wir dann $\varphi_{i,n} \in C_c^+(X)$ durch

$$\varphi_{i,n}(x) = \frac{\psi_{i,n}(x)}{\psi(x)},$$

so ist $(\varphi_{i,n})_{(i,n)\in J}$ die gesuchte abzählbare Partition der Eins. $\square$

10. Der Approximations-Satz von Stome-Weierstrass

Sei X ein lokalkompakter Raum. Zusätzlich zur üblichen Vektorraumstruktur besitzt $C_0(X)$ eine Multiplikation, die einem Paar (f,g) das punktweise Produkt $f\cdot g : X \to \mathbb{C}$ zuordnet (also $f\cdot g(x) = f(x)g(x)$ für alle $x \in X$). Damit wird $C_0(X)$ zu einer *Algebra*. Dementsprechend heißt ein Untervektorraum $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ eine *Unteralgebra* von $C_0(X)$, falls $f\cdot g \in \mathcal{A}$ für alle $f,g \in \mathcal{A}$. Ähnliche Notationen benutzen wir für die reelle Algebra $C_0^{\mathbb{R}}(X)$.

Definition 10.1. Sei $\mathcal{B} \subseteq C_0(X)$ (bzw. $\mathcal{B} \subseteq C_0^{\mathbb{R}}(X)$). Wir sagen: $\mathcal{B}$ *trennt die Punkte von* X, falls zu jedem Paar $x,y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in \mathcal{B}$ existiert mit $f(x) \neq f(y)$. Wir sagen: $\mathcal{B}$ *trennt die Punkte von* X *im strengen Sinne*, falls zusätzlich zu jedem $x \in X$ ein $g \in \mathcal{B}$ existiert mit $g(x) \neq 0$.

Bemerkung 10.2. Ist X ein lokalkompakter Raum, so trennt $C_0^{\mathbb{R}}(X)$ die Punkte von X im strengen Sinne, denn nach Urysohn existiert zu jedem Paar $x,y \in X$ mit $x \neq y$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$. Ebenso gilt: Ist $\mathcal{A} \subseteq C_0^{\mathbb{R}}(X)$ dicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, so trennt auch $\mathcal{A}$ streng die Punkte von X, denn zu f wie oben und zu $\varepsilon = \frac{1}{4}$ existiert dann ein $g \in \mathcal{A}$ mit $\|f-g\|_\infty < \frac{1}{4}$, und dann folgt $g(x) > \frac{3}{4}$ und $g(y) < \frac{1}{4}$.

Satz 10.3 (Stone-Weierstraß)**.** *Sei X ein lokalkompakter Raum und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0^{\mathbb{R}}(X)$ eine Unteralgebra von $C_0^{\mathbb{R}}(X)$ die im strengen Sinn die Punkte von X trennt. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0^{\mathbb{R}}(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.*

Für den Beweis benötigen wir

Lemma 10.4 (Satz von Dini)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $t \in [0,1]$ existiert dann ein $n_t \in \mathbb{N}$ mit $f_n(t) \geq f_{n_t}(t) \geq f(t) - \varepsilon$ für alle $n \geq n_t$. Sei $U_t := \{s \in [0,1] : f(s) - f_{n_t}(s) < \varepsilon\}$. Dann ist U_t eine offene Umgebung von t und da $[0,1]$ kompakt ist, existieren endlich viele $t_1,\ldots,t_l \in [0,1]$ mit $[0,1] \subseteq U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_l}$. Ist dann $N = \max\{n_{t_1},\ldots,n_{t_l}\}$, so folgt $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. □

Lemma 10.5. *Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_b^{\mathbb{R}}(X)$. Ist dann $f \in \mathcal{A}$, so ist $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, wobei $\overline{\mathcal{A}}$ den Abschluss von $\mathcal{A}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet.*

Beweis. Die Aussage ist klar wenn $f = 0$. Sei also $f \neq 0$. Durch Übergang auf $\frac{1}{\|f\|_\infty} f$ können wir dann o.B.d.A. $f(X) \subseteq [-1, 1]$ annehmen. Dann gilt auch $f(x)^2 \in [0, 1]$ für alle $x \in X$. Wir definieren nun induktiv eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $p_1 \equiv 0$ und

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) - \frac{1}{2}(p_n(t)^2 - t), \quad t \in [0, 1].$$

Dann gilt $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ für alle $t \in [0, 1]$, und $p_n(0) = 0$. Dies ist klar für $n = 1$, und der Schritt $n \to n + 1$ folgt aus:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} &= (p_n(t) - \sqrt{t}) - \frac{1}{2}(p_n(t) - \sqrt{t})(p_n(t) + \sqrt{t}) \\ &= (p_n(t) - \sqrt{t})\big(1 - \frac{1}{2}(p_n(t) + \sqrt{t})\big) \leq 0, \end{aligned}$$

da $p_n(t) - \sqrt{t} \leq 0$ und $p_n(t) + \sqrt{t} \leq 2\sqrt{t} \leq 2$.

Wegen $p_{n+1}(t) - p_n(t) = \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2) \geq 0$ ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend auf $[0, 1]$ und beschränkt durch $\sqrt{t}$. Ist dann $g(t) := \lim_{n\to\infty} p_n(t)$, so gilt $g(t) = \sqrt{t}$, denn $0 = g(t) - g(t) = \lim_{n\to\infty} \big(p_{n+1}(t) - p_n(t)\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big(t - p_n(t)^2\big) = \frac{1}{2}(t - g(t)^2)$. Es folgt $t = g(t)^2$, und da $0 \leq g(t) \leq \sqrt{t}$ folgt $g(t) = \sqrt{t}$.

Da g stetig ist, folgt mit Dini, dass $\|p_n - g\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Ist dann $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\big|p_n\big(f(x)^2\big) - \sqrt{f(x)^2}\big| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ und für alle $n \geq N$, und es gilt $\|p_n(f^2) - |f|\,\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ ist, und da $p_n(0) = 0$, ist mit $f \in \mathcal{A}$ auch $p_n(f^2) = \sum_{j=1}^m a_j f^{2j} \in \mathcal{A}$. Da $p_n(f^2) \to |f|$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ folgt $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Bemerkung 10.6. Aus dem obigen Lemma folgt leicht: Ist $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_b^{\mathbb{R}}(X)$, und sind $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, so sind auch die Funktionen $\max(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big)$ und $\min(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$ in $\overline{\mathcal{A}}$. Mit Lemma 10.5 gilt dies zumindest für alle $f, g \in \mathcal{A}$. Aber dann gilt die Aussage auch für $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, denn sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{A}$ mit $f_n \to f$ und $g_n \to g$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, so gilt auch $\max(f_n, g_n) \to \max(f, g)$ und $\min(f_n, g_n) \to \min(f, g)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis von Satz 10.3. Wir zeigen zunächst: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so existiert ein $g \in \mathcal{A}$ mit $g(x) \neq g(y)$ und $g(x) \neq 0 \neq g(y)$. Da $\mathcal{A}$ streng die Punkte von X trennt existiert eine Funktion $g_1 \in \mathcal{A}$ mit $g_1(x) \neq g_1(y)$, und es gelte o.B.d.A. $g_1(y) \neq 0$. Ist dann auch $g_1(x) \neq 0$, so setze $g = g_1$. Ansonsten existiert eine Funktion $g_2 \in \mathcal{A}$ mit $g_2(x) \neq 0$. Gilt $g_2(x) \neq g_2(y) \neq 0$, so setzen wir $g = g_2$. Ist dies nicht der Fall, so machen wir den Ansatz $g = g_1 + \mu g_2$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Ist $g_2(x) = g_2(y)$, so setze $\mu = 1$, und ist $g_2(y) = 0$, so wähle $\mu \in \mathbb{R}$ mit $g_1(y) \neq \mu g_2(x) \neq 0$. In beiden Fällen erfüllt g die oben gewünschten Eigenschaften.

Im nächsten Schritt zeigen wir: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben, so existiert ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$.

Sei dazu $g \in \mathcal{A}$ mit $g(x) \neq g(y)$ und $g(x) \neq 0 \neq g(y)$. Wir machen den Ansatz $f = \lambda g + \mu g^2 \in \mathcal{A}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(x) = \alpha, f(y) = \beta \iff \begin{pmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Da aber

$$\begin{vmatrix} g(x) & g(x)^2 \\ g(y) & g(y)^2 \end{vmatrix} = g(x)g(y)^2 - g(x)^2 g(y) = g(x)g(y)\big(g(y) - g(x)\big) \neq 0$$

existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die diese Gleichungen erfüllen.

Sei schließlich $h \in C_0^{\mathbb{R}}(X)$ beliebig vorgegeben, und sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir konstruieren nun eine Funktion $f \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$. Dazu wählen wir zu jedem Paar $x, y \in X$ eine Funktion $g_{x,y} \in \mathcal{A}$ mit $g_{x,y}(x) = h(x)$ und $g_{x,y}(y) = h(y)$. Für festes $y \in X$ setzen wir

$$U_x := \{z \in X : h(z) < g_{x,y}(z) + \varepsilon\}.$$

Dann ist U_x eine offene Umgebung von x und $X \setminus U_x = \{z \in X : (h - g_{x,y})(z) \geq \varepsilon\}$ ist kompakt, da $h - g_{x,y}$ in ∞ verschwindet. Halten wir dann ein $x_1 \in X$ fest, so existieren $x_2, \ldots, x_l \in X \setminus U_{x_1}$ mit $X \setminus U_{x_1} \subseteq U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_l}$ und dann folgt $X \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_l}$. Setzen wir

$$f_y := \max(g_{x_1,y}, \ldots, g_{x_l,y}),$$

so folgt mit Bemerkung 10.6, dass $f_y \in \overline{\mathcal{A}}$ für alle $y \in X$. Nach Konstruktion von f_y gilt

$$h(z) - f_y(z) < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in X,$$

denn ist $z \in U_{x_i}$, so folgt $h(z) - \varepsilon < g_{x_i,y} \leq f_y(z)$. Zu $y \in X$ setze nun

$$V_y := \{z \in X : f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}.$$

Dann ist V_y offene Umgebung von y, da wegen $g_{x,y}(y) = h(y)$ für $x \in X$ folgt, dass $f_y(y) = \max(g_{x_1,y}, \ldots, g_{x_l,y})(y) = h(y) < h(y)+\varepsilon$. Wie oben folgt nun, dass $X \setminus V_y$ für jedes $y \in X$ kompakt ist, und damit existieren $y_1, \ldots y_k \in X$ mit $X \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k}$. Setzen wir

$$f := \min(f_{y_1}, \ldots, f_{y_k}),$$

so ist $f \in \overline{\mathcal{A}}$ (nach Bemerkung 10.6). Zu jedem $z \in X$ existiert ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $z \in V_{y_j}$, und dann folgt $f(z) - \varepsilon \leq f_{y_j}(z) - \varepsilon < h(z)$. Wegen $h(z) < f_y(z) + \varepsilon$

für alle $y, z \in X$, folgt aber auch $h(z) < f(z) + \varepsilon$ für alle $z \in X$, und damit gilt $\|h - f\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Wir wollen natürlich auch eine Version des Satzes von Stone-Weierstraß für komplex-wertige Funktionen erhalten. Dazu bemerken wir zunächst, dass $C_0(X) = C_0^{\mathbb{R}}(X) + iC_0^{\mathbb{R}}(X)$. Damit lässt sich die folgende komplexe Version leicht auf den reellen Fall zurückführen:

Satz 10.7 (Komplexe Version des Satzes von Stone-Weierstraß)**.** *Sei X ein lokal-kompakter Raum und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_0(X)$ die streng die Punkte von X trennt. Ferner sei $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter komplexer Konjugation, d.h. es gelte $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \{f \in \mathcal{A} : f(X) \subseteq \mathbb{R}\}$. Dann ist $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ eine Unteralgebra von $C_0^{\mathbb{R}}(X)$ und für jedes $f \in \mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Also gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, und da $\mathcal{A}$ streng die Punkte von X trennt gilt dies auch für $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Nach Satz 10.3 gilt nun $\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = C_0^{\mathbb{R}}(X)$, und es folgt

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} + i\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = C_0^{\mathbb{R}}(X) + iC_0^{\mathbb{R}}(X) = C_0(X).$$

□

Für kompakte Räume X erhalten wir:

Satz 10.8. *Sei X ein kompakter T_2-Raum, und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C(X)$ mit $1 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von X und $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter komplexer Konjugation (also $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$). Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.*

Beweis. Da $\mathcal{A}$ die Punkte von X trennt, folgt mit $1 \in \mathcal{A}$ auch, dass $\mathcal{A}$ streng die Punkte von X trennt. Der Beweis folgt dann sofort aus Satz 10.7. □

Natürlich kann man auch eine relle Version dieses Satzes formulieren.

Übung 10.9. (a) (Klassischer Weierstraßscher Aproximationssatz) Zeigen Sie, dass für jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ die komplexen (bzw. reellen) Polynome dicht liegen in $C([a, b])$ (bzw. $C^{\mathbb{R}}([a, b])$) bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Sei allgemeiner $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\mathcal{P} \subseteq C(X)$ die Menge aller Polynome in n Variablen. Dann liegt $\mathcal{P}$ dicht in $C(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

(c) Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Finden sie eine Funktion $f \in C(\mathbb{T})$, so dass f nicht gleichmäßiger Limes von (komplexen) Polynomen ist.

(d) Sei $\mathcal{L} \subseteq C(\mathbb{T})$ die Menge der Laurent-Polynome auf $\mathbb{T}$, das heißt

$$f \in \mathcal{L} \;\Leftrightarrow\; f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \quad (\text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_{-n}, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \text{ geeignet}).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ dicht liegt in $C(\mathbb{T})$ bezüglich $\| \cdot \|_\infty$.