Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 12

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(1) $\exp(A)$ ist invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(2) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ selbstadjungiert (also $A = A^*$), so ist $\exp(iA) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ unitär.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Ist $N \in M(n \times n, K)$ nilpotent, so ist $E_n - N$ invertierbar. (Neumannreihe.)

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Umkehrung von Satz 11.9 der Vorlesung: Sei U ein Untervektorraum des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Ist dann $\{v_1, \ldots, v_l, u_1, \ldots, u_m\}$ eine Basis von V, so dass $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Basis von U ist, so ist $\{v_1 + U, \ldots, v_l + U\}$ eine Basis von V/U.

Aufgabe 4. Sei $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und berechnen Sie die duale Basis $\mathcal{B}^*$ von $(\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich $\mathcal{B}$, wenn Sie $\mathbb{R}^4$ mit dem Dualraum $(\mathbb{R}^4)^*$ vermöge $y \mapsto \varphi_y$ mit $\varphi_y(x) = y^T x$ identifizieren.
Genauer: Berechnen Sie eine Basis $\{y_1, \ldots, y_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, so dass $\mathcal{B}^* = \{\varphi_{y_1}, \ldots, \varphi_{y_4}\}$.

Abgabe: Montag, den 11.07.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.

Eine Zusammenfassung der bisherigen Themen der Linearen Algebra II

Zunächst einmal ist die Grundlage für die LA II ein gutes Verständnis der wichtigsten Inhalte der LA I. Hier sind besonders zu nennen: Vektorräume, lineare (Un-)Abhängigkeit, Basen, Darstellungsmatrizen, Determinanten, Lineare Gleichungssysteme, Berechnung von Inversen Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit.

In der LA II haben wir die folgenden Themen behandelt:

§1 Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren, Der Fundamentalsatz der Algebra. Wichtige Sätze und Definitionen in §1 sind die Nummern 1.5, 1.6, 1.7, 1.11.

§2 In §2 haben wir zunächst den Begriff der Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen und Matrizen wiederholt und haben dann ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit mit Hilfe von algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte bewiesen. Zentrales Ergebnis in §2 ist Satz 2.8

§3 Euklidische und unitäre Vektorräume: Wir haben den Begriff des Skalarprodukts auf reellen und komplexen Vektorräumen eingeführt. Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir die geometrischen Größen *Länge eine Vektors* (Norm) und den *Winkel zwischen zwei Vektoren* erklären. Insbesondere erhalten wir den Begriff der *Orthogonalität* zwischen Vektoren, der geometrisch bedeutet, dass diese Vektoren senkrecht zueinander stehen: Es gilt $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$. Dies erlaubt uns dann auch das *senkrechte Lot (oder die othogonale Projektion)* eines Vektors v auf einen Untervektorraum U zu erklären. Wir haben dies zunächst nur für Geraden durchgeführt, und dann später (in §4) auch für beliebige Untervektorräume erklärt. Wichtige Sätze und Definition in §3 sind 3.1, 3.4, 3.5, 3.7, 3.10, 3.13, 3.15.

§4 In endlich-dimensionsalen euklidischen und unitären Vektorräumen V haben wir den *Senkrechtraum* (oder das *orthogonale Komplement*) $M^\perp$ einer Teilmenge M von V sowie den Begriff der orthogonalen direkten Summe von zwei Untervektorräumen eingeführt. Dieser steht in engem Zusammenhang mit dem Begriff der othogonalen Projektion auf einen Untervektorraum: Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, und besitzt V eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe $U \oplus U^\perp$, so ist die othogonale Projektion $P_U : V \to U$ gerade gegeben durch die übliche Projektion auf den ersten direkten Summanden (d.h. ist $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$, so gilt $P_U(v) = v_1$).

Wir haben dann den Begriff einer Orthonormalbasis (ONB) eingeführt – dies ist eine Basis bestehend aus Vektoren, die alle die Länge 1 haben und die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Mit Hilfe von ONBs eines Untervektorraums U von V kann man dann sehr leicht die orthogonale Projekion $P_U : V \to U$ explizit berechnen. Ferner ist es sehr leicht die Koeffizienten eines Vektors v für die Darstellung von v als Linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ der Elemente einer ONB $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zu berechnen: Es gilt $\lambda_i = \langle v, v_i\rangle$ für $1 \leq i \leq n$. Wichtige Sätze und Definition in §4 sind insbesondere: 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 4.12, 4.13, 4.16.

§5 In §5 haben wir zunächst allgemeine Sesquilinearformen (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind dies Bilinearformen) $f : V \times W \to \mathbb{K}$ auf dem Produkt $V \times W$ von zwei unitären (bzw. euklidischen) Vektorräumen untersucht, und gesehen, dass sich diese immer in der Form $f(v, w) = \langle F(v), w\rangle$ für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $F : V \to W$ schreiben lassen. Sind $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ ONBs von V und W, so hat die Darstellungsmatrix $A := {}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}$ von F bezüglich dieser Basen die Einträge $a_{ij} = f(v_i, w_j)$. Als eine Anwendung erhalten wir eine sinnvolle Definition der *adjungierten Abbildung* $F^* : W \to V$ einer linearen Abbildung $F : V \to W$. Die

Abbildung F^* ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die die Gleichung

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$ erfüllt. Sind $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ ONBs von V und W, so gilt für die Darstellungsmatrizen ${}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}$ und ${}^{\mathcal{B}}A_{F^*}^{\tilde{\mathcal{B}}}$ die Gleichung

$${}^{\mathcal{B}}A_{F^*}^{\tilde{\mathcal{B}}} = \left({}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}\right)^*$$

wobei $A^* := \bar{A}^T$ (ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt $A^* = A^T$). Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer oder euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum, so haben wir dann alle möglichen anderen Skalarprodukte auf V charakterisiert: Diese sind genau die Abbildungen von $V \times V \to K$ der Form

$$(v, w) \mapsto \langle F(v), w\rangle$$

wobei $F : V \to V$ ein positiv definiter Endomorphismus von V ist – das bedeutet, dass F *selbstadjungiert* ist (also $F = F^*$), und dass für alle $0 \neq v \in V$ gilt: $\langle F(v), v\rangle > 0$. Ist $\mathcal{B}$ eine beliebige ONB von V, so ist F genau dann positiv definit, wenn die Darstellungsmatrix $A_F^{\mathcal{B}}$ positiv definit ist. Wir haben dann das Kriterium von Sylvester (oft als Hurwitz-Kriterium bekannt) für die positve Definitheit einer $n \times n$-Matrix kennen gelernt. Die wichtigsten Definitionen und Sätze in §5 sind: 5.2, 5.4, 5.5, 5.6, 5.8, 5.10, 5.12.

§6 In §6 haben wir orthogonale und unitäre Endomorphismen (oder Matrizen) kennen gelernt. Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer (bzw. euklidischer) $\mathbb{K}$-Vektorraum, so heißt $F \in \mathrm{End}(V)$ *unitär* (bzw. *orthogonal*), wenn $F^* \circ F = \mathrm{id}_V = F \circ F^*$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass F das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erhält, das heißt, für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Analog heißt eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ unitär (bzw. orthogonal), wenn $A^*A = E_n = AA^*$ gilt. Dies ist dann äquivalent dazu, dass die Zeilen bzw. Spalten von A eine ONB von $\mathbb{K}^n$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts bilden. Im Fall reeller 2×2-Matrizen sind dies genau die Drehungen und die Spiegelungen an Geraden, die durch den Nullpunkt gehen. Die unitären (bzw. orthogonalen) Endomorphismen eines endlich-dimensionalen unitären (bzw. euklidischen) Vektorraums V bilden die Gruppe $U(V)$ (bzw. $O(V)$) die in der Mathematik von großer Bedeutung ist. Dies gilt auch für die Gruppen $U(n)$ und $O(n)$ der unitären bzw. orthogonalen $n \times n$-Matrizen.

Wir haben dann gezeigt, dass jede Abbildung $F : V \to V$ eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums, die die Abstände zwischen zwei Punkten erhält, automatisch eine Verknüpfung einer orthogonalen Abbildung mit einer Translation (=Verschiebung) von V ist. Solche Abbildungen heißen *Bewegungen* und sind aus der Schule als Kongruenzabbildungen bekannt. Wichtige Definitionen und Sätze in §6 sind: 6.1, 6.2, 6.5, 6.8, 6.9, 6.11, 6.12.

§7 In diesem Abschnitt haben wir die Diagonalisierbarkeit von *normalen* Endomorphismen (bzw. Matizen) untersucht. Hierbei heißt eine Endomorphismus F eines endlich-dimensionalen unitären (bzw. euklidischen) $\mathbb{K}$-Vektorraums normal, wenn $F^* \circ F = F \circ F^*$ gilt. Analog heißt eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ normal, wenn $A^*A = AA^*$ gilt. Wichtige Beispiele für normale Endomorphismen (bzw. Matrizen) sind selbstadjungierte oder untäre/orthogonale Endomorphismen (bzw. Matrizen). Wir haben dann gezeigt: Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und ist $F \in \mathrm{End}(V)$ normal, so existiert immer eine ONB aus Eigenvektoren für F. Insbesondere ist dann F diagonalisierbar. Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ normal, so existiert dann immer eine unitäre Matrix U mit $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (beachte: hier gilt $U^* = U^{-1}$). Hierbei bilden die Spalten von U gerade eine ONB von Eigenvektoren von $\mathbb{K}^n$ für $F_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; z \mapsto Az$.

Im Fall von endlich-dimensionalen euklidischen Vektorräumen V sind normale Endomorphismen $F \in \mathrm{End}(V)$ (bzw. normale Matrizen über $\mathbb{R}$) im allgemeinen nicht diagonalisierbar. Ist F (bzw. A) **selbstadjungiert**, (für $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ bedeutet dies, dass $A = A^T$, d.h., dass A *symmetrisch* ist), so sind alle Eigenwerte reell, und F (bzw. A) ist auch über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Auch hier können wir immer eine ONB von V aus Eigenvektoren von F finden (bzw. eine orthogonale Matrix $O \in O(n)$ finden), so dass $A_F^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (bzw. $O^T A O = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$) gilt.

Im allgemeinen Fall betrachten wir zunächst die Komplexifizierung $F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ von $F : V \to V$ (bzw. wir fassen A als komplexe Matrix auf). Dann ist $F_{\mathbb{C}}$ (bzw. A) nach dem oben genannten Resultat immer über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Man stellt dann fest, dass die nicht-reellen Eigenwerte immer als Paar $\mu, \bar{\mu}$ auftauchen. Wählt man dann zu jedem komplexen Paar von Eigenwerten $(\mu, \bar{\mu})$ eine ONB $\{u_1, \ldots, u_l\}$ des (komplexen!) Eigenraums $E_\mu = \mathrm{Kern}(F - \mu \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ und zerlegt dann jedes $u_j = v_j + i w_j$ in Real- und Imaginärteil, so bilden die Vektoren $\{\sqrt{2} v_1, \sqrt{2} w_1, \ldots, \sqrt{2} v_l, \sqrt{2} w_l\}$ eine *reelle* ONB von $E_\mu \oplus E_{\bar{\mu}}$. Wählen wir für alle komplexen Eigenwertpaare eine solche Basis und für alle reellen Eigenwerte jeweils eine reelle ONB der entsprechenden Eigenräume, so erhalten wir insgesamt eine ONB $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$A_F^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, A_1, \ldots, A_m)$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ die reellen Eigenwerte (mit geeigneten Vielfachheiten) von F sind, und $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$ wenn $\mu_i, \bar{\mu}_i$, mit $\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$, die konjugiert komplexen Eigenwertpaare (mit geeigneten Vielfachheiten) von F sind. Analog findet man für normale Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix $O \in O(n)$, so dass $O^T A O$ eine solche Gestalt besitzt.

Da jeder Eigenwert μ einer orthogonalen/unitären Matrix den Betrag $|\mu| = 1$ hat, liefert das obige Resultat angewandt auf orthogonale Matrizen eine Darstellungsmatrix der Form

$$A_F^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, O(\alpha_1), \ldots, O(\alpha_m))$$

mit $O(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}$ eine Drehmatrix zum Winkel α_i. Ein Orthogonaler Endomorphismus setzt sich daher immer aus endlich vielen Drehungen und Spiegelungen zusammen. Wichtige Definitionen und Sätze in §7 sind: 7.1, 7.3, 7.4, 7.5, 7.10, 7.13, 7.14, 7.16, 7.17, 7.18, 7.19.

§8 (Hauptachsentransformation) In diesem Abschnitt haben wir Polynome zweiten Grades auf $\mathbb{R}^n$ untersucht. Wir haben gesehen, dass sich jedes solche Polynom schreiben lässt in der Form

$$p(x) = x^T A x + 2a^T x + \alpha$$

mit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir haben dann gezeigt, dass man mit Hilfe einer Verschiebung des Ursprungs zusammen mit einer orthogonalen Transformation das Polynom p auf eine Standardform bringen kann, an der man die Eigenschaften von p sehr genau ablesen kann. Genauer, wir haben gezeigt:

(a) Ist $a \in \mathrm{Bild}(A)$, so existieren $d \in \mathbb{R}^n$, $O \in O(n)$, $\beta \in \mathbb{R}$ und Zahlen $\rho_1, \ldots, \rho_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_m > 0$ mit $k \leq m \leq n$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$p(Ox + d) = \frac{x_1^2}{\rho_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{\rho_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{\sigma_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_m^2}{\sigma_m^2} + \beta.$$

(b) Ist $a \notin \mathrm{Bild}(A)$, so existieren $d \in \mathbb{R}^n$, $O \in O(n)$, $\beta \in \mathbb{R}$ und Zahlen $\rho_1, \ldots, \rho_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_m > 0$ mit $k \leq m \leq n-1$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$p(Ox + d) = \frac{x_1^2}{\rho_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{\rho_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{\sigma_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_m^2}{\sigma_m^2} + \beta x_n.$$

Wir haben dann im Fall des $\mathbb{R}^2$ die geometrische Struktur der zugehörigen Quadriken, das heißt, der Mengen

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 0\}$$

genauer untersucht und beschrieben. Die wichtigsten Definitionen und Sätze in §8 sind: 8.1, 8.2, 8.5, 8.6, 8.7, 8.9.

§9 In diesem Abschnitt haben wir gezeigt, dass jeder Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V (bzw. jede quadratische Matrix), deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, eine Jordan-Normalform besitzt, das heißt, es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}$$

wobei die einzelnen Blockmatrizen J_i Jordan-Kästen zu den Eigenwerten λ_i von F sind, d.h.

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M(k_i \times k_i, K).$$

Der Beweis und die Konstruktion sind recht aufwändig! Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, besitzt insbesondere jeder Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums (bzw. jede komplexe $n \times n$-Matrix) eine Jordan-Normalform. Für $\mathbb{R}$-Vektorräume gilt das aber nicht. Für diese kann man ähnlich wie bei der reellen Normalform für normale Endomorphismen eine reelle Version der Jordan-Normalform herleiten, in der die komplexen Eigenwerte auf der Diagonalen durch entsprechende 2×2 Matrizen ersetzt werden. Beim Beweis und der Konstruktion der Jordan-Normalform spielen vor allem auch *nilpotente* Endomorphismen (bzw. Matrizen) eine wichtige Rolle – dies sind Endomorphismen G (bzw. Matrizen N), für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $G^k = 0$ (bzw. $N^k = 0$). Die wichtigsten Sätze und Definition in §9 sind: 9.2, 9.5, 9.6. Die Punkte 9.9, 9.11, 9.13, 9.15, 9.18 stellen wichtige Schritte zur Jordan-Normalform dar. In 9.19 wird das gesamte Verfahren noch einmal zusammengefasst. Am Ende des Abschnitts wird die reelle Version beschrieben.

§10 In diesem Abschnitt haben wir Reihen von Matrizen behandelt. Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ mit $A_k \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt *konvergent*, wenn die Folge der Summen der Partialsummen $S_N = \sum_{k=0}^{N} A_k$ in jeder Komponente konvergiert. Wir haben dann die Operatornorm $\|A\|_{op}$ einer Matrix A definiert und mit Hilfe dieser Norm den Begriff der absoluten Konvergenz eingeführt: $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ ist *absolut konvergent*, wenn die reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|_{op}$ konvergiert. Wie für gewöhnliche komplexe Reihen folgt aus absoluter Konvergenz immer die gewöhnliche Konvergenz. Wir haben dann gesehen, dass für jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ gilt: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\|A\|_{op} < R$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ absolut konvergent. Da die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ den Konvergenzradius $R = \infty$ hat, können wir daher für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ die Matrix A in die Exponentialreihe einsetzen und erhalten

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in M(n \times n, \mathbb{C}).$$

Für $\exp(A)$ gilt die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: Sind $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A \cdot B = B \cdot A$, so gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

Wir haben dann die Jordan-Normalform von A benutzt, um die Matrix $\exp(A)$ explizit zu berechnen! Die wichtigsten Sätze und Definitionen von §10 sind: 10.1, 10.2, 10.4, 10.6, 10.7, 10.8, 10.10, 10.11.

Hier eine Sammlung von Vokabelbuch-Aufgaben, wie sie so oder ähnlich in einer Klausur gestellt werden könnten!

Aufgabe 1.

(1) Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?
(2) Was ist ein Eigenwert eines Endomorphismus (einer quadratischen Matrix), was ist ein Eigenvektor?
(3) Wie sind die algebraische und die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts definiert?
(4) Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus F mit Hilfe der Eigenwerte von F an.
(5) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{Q})$. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2. Sei im folgenden V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

(1) Was ist ein Skalarprodukt auf V?
(2) Was ist ein unitärer Vektorraum, was ist ein euklidischer Vektorraum?
(3) Wie lautet die Parallelogramm-Gleichung?
(4) Wie lautet die Polarisierungsformel für ein Skalarprodukt auf einem euklidischen Vektorraum?
(5) Wie ist die Länge eines Vektors in einem euklidischen/unitären Vektorraum definiert?
(6) Wie ist der Winkel $\sphericalangle(v, w)$ zwischen den Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum definiert?
(7) Wann heißen die Vektoren v und w orthogonal?
(8) Wie lautet der Satz von Pythagoras in allgemeinen euklidischen/unitären Vektorräumen?
(9) Geben Sie eine Formel für die orthogonale Projektion eines Vektors v auf die Gerade $G = \mathbb{R} \cdot w \subseteq V$ im euklidischen Vektorraum V wenn $0 \neq w \in V$.
(10) Sei V ein unitärer/euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Unter welchen Voraussetzungen gilt $V = U \oplus U^{\perp}$?
(11) Was ist eine Orthonormalbasis (ONB) eines unitären/euklidischen $\mathbb{K}$-Vektorraums?
(12) Was ist ein Orthogonalsystem?
(13) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine ONB von V und sei $v \in V$. Geben Sie eine Formel für die Koeffizienten λ_i in der Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.
(14) Wie lautet die Parsevalsche Gleichung?

Aufgabe 3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer/euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

(1) Sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Wie ist der adjungierte Endomorphismus $F^* \in \mathrm{End}(V)$ definiert?
(2) Wann heißt F selbstadjungiert? Wann heißt F unitär? Wann heißt F orthogonal? Wann heißt F normal?
(3) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Wie ist die adjungierte Matrix A^* von A definiert?
(4) Wann heißt A selbstadjungiert? Wann heißt A unitär? Wann heißt A orthogonal? Wann heißt A normal?
(5) Was ist eine Bewegung eines euklidischen Vektorraums?
(6) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Ist A diagonalisierbar?
(7) Formulieren Sie den Satz über die Diagonalisierbarkeit komplexer normaler Matrizen. Ist auch jede reelle normale Matrix diagonalisierbar?
(8) Wie lautet die Normalform für orthogonale Endomorphismen?
(9) Sei $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ ein weiteres Skalarprodukt auf V. Geben Sie eine Beziehung zwischen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ an!
(10) Wann heißt eine Matrix positiv definit?
(11) Wie lautet das Kriterium von Sylvester für die positive Definitheit einer Matrix A?
(12) Formulieren Sie ein Kriterium für die positive Definitheit einer Matrix A mit Hilfe der Eigenwerte von A.

Aufgabe 4.

(1) Wie lautet die Standardschreibweise (oder Matrix-Schreibweise) eines Polynoms zweiten Grades auf $\mathbb{R}^n$?
(2) Wie lauten die zwei möglichen Normalformen solcher Polynome?
(3) Was ist eine Quadrik?

Aufgabe 5. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $F \in \mathrm{End}(V)$.

(1) Wann ist F trigonalisierbar?
(2) Wann heißt eine Matrix J Jordan-Normalform zu F?
(3) Wann existiert eine Jordan-Normalform für F?
(4) Was ist ein Jordan-Kasten zum Eigenwert λ?
(5) Wann heißt eine Matrix nilpotent?
(6) Wie ist der Hauptraum V_λ zu einem Eigenwert λ von F definiert?
(7) Sei nun V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Wie ist die Komplexifizierung $V_\mathbb{C}$ von V definiert? Wie ist die Komplexifizierung $F_\mathbb{C}$ von F definiert?
(8) Sei nun V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei μ ein komplexer Eigenwert von $F_\mathbb{C}$ und sei $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis des Hauptraums $(V_\mathbb{C})_\mu$ von $F_\mathbb{C}$ zum Eigenwert μ. Geben Sie eine Basis für den Hauptraum $(V_\mathbb{C})_{\bar{\mu}}$ von $F_\mathbb{C}$ zum Eigenwert $\bar{\mu}$ an.
(9) Wie sieht ein reeller Jordan-Kasten zu einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar $\mu, \bar{\mu}$ von F aus?

Aufgabe 6.

(1) Sei $A_k \in M(n \times n, \mathbb{C})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergent?
(2) Wie ist die Operatornorm $\|A\|_{op}$ einer Matrix A definiert?
(3) Wann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ absolut konvergent?

(4) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür, dass $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ absolut konvergent ist.

(5) Wie lautet die Funktionalgleichung für die Matrix-wertige Exponentialfunktion (mit allen Voraussetzungen)!

Aufgabe 7. Sei U ein Untervektorraum des K-Vektorraums V.

(1) Wie ist der Quotientenraum V/U von V nach dem Untervektorraum U definiert?

(2) Wie lautet die Dimensionsformel für $\dim(V), \dim(U)$ und $\dim(V/U)$?

Rechnen

Hier schauen Sie sich am besten alle Rechenaufgaben aus den Übungsblättern noch einmal genau an. Seien Sie sicher, dass Sie die Rechenverfahren und die Rechenschritte genau beherrschen!

Beweisen

Auch hier ist es eine gute Übung, alle Beweisaufgaben aus den Übungszetteln noch einmal zu bearbeiten (am besten ohne vorher die Musterlösungen anzuschauen!)