Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 9

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ selbstadjungiert. Zeigen Sie: Dann gilt $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Kern}(A)^\perp$ und entsprechend gilt $\mathbb{K}^n = \mathrm{Kern}(A) \oplus \mathrm{Bild}(A)$. Folgern Sie hieraus eine Verschärfung von Lemma 8.3 der Vorlesung: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ selbstadjungiert, so gilt für alle $l \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Kern}(A^l) = \mathrm{Kern}(A) \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(A^l) = \mathrm{Bild}(A).$$

Aufgabe 2. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ eine beliebige Matrix. Zur Erinnerung: A heißt *positiv semidefinit*, wenn A selbstadjungiert ist und wenn für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt: $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Zeigen Sie:

(1) Es existiert genau eine positiv semidefinite Matrix $|A| \in M(n\times n, \mathbb{K})$ mit $|A|^2 = A^*A$ (wir sagen $|A|$ ist der *Betrag von* A).

(2) Ist A invertierbar, so auch $|A|$, und es existiert eine unitäre Matrix $U \in U(n)$ (bzw. eine orthogonale Matrix $U \in O(n)$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), mit $A = U|A|$. Die Zerlegung $A = U|A|$ heißt Polarzerlegung von A.

Aufgabe 3. Eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $b(v, w) = b(w, v)$ für alle $v, w \in V$. Sei nun $\dim(V) = n < \infty$. Ist dann $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so definieren wir die *Darstellungsmatrix* $A_b^{\mathcal{B}} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ *von* b *bezüglich* $\mathcal{B}$ durch $A_b^{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit

$$a_{ij} = b(v_j, v_i) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Zeigen Sie:

(1) A ist symmetrisch, d.h., es gilt $A = A^T$.

(2) Ist $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ und $w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$ und sind $x = (x_1, \ldots, x_n)^T, y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die zugehörigen Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$b(v, w) = \langle Ax, y\rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(3) b ist genau dann ein Skalarprodukt auf V, wenn die Matrix A positiv definit ist.

Aufgabe 4. Sei $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ der Standard-Kegel im $\mathbb{R}^3$. Ferner seien

(a) $E_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^2 : x + y + z = 1\}$,

(b) $E_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^2 : x + y + 2z = 1\}$, und

(c) $E_3 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^2 : x + 2z = 1\}$.

drei 2-dimensionale Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Typen der Quadriken $Q_i = P(K \cap E_i) \subseteq \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, wie in Beispiel 8.9 der Vorlesung, wobei $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; P((x, y, z)^T) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Projektion auf die x, y-Ebene bezeichnet.

Hinweis: Finden Sie zunächst quadratische Polynome p_1, p_2, p_3, so dass die Q_i die Nullstellenmengen der p_i sind. Schreiben Sie dann die p_i in der Standardform

$$p_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)A_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2a_i^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_i$$

mit $A_i \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ symmetrisch, $a_i \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$. In einigen Fällen können Sie ausnutzen, dass $a_i \in \mathrm{Bild}(A_i)$ gilt.

Abgabe: Montag, den 20.06.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.