Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 8

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Berechnen Sie eine othogonale Matrix $O \in O(3)$ mit $O^T AO = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, für geeignete $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, wobei $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezeichnet.

Aufgabe 2. Sei $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{6}-1 & -\sqrt{6}-2 \\ -2\sqrt{6}-1 & 1 & -\sqrt{6}+2 \\ \sqrt{6}-2 & \sqrt{6}+2 & 4 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(1) Zeigen Sie, dass A orthogonal ist und berechnen Sie eine unitäre Matrix $U \in U(3)$ mit $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ für geeignete $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in $\mathbb{C}$.

(2) Bestimmen Sie nun eine orthogonale Matrix $O \in O(3)$, so dass $O^T AO$ die reelle Normalform von A wie in Satz 7.13 bzw. Satz 7.17 der Vorlesung ist. Berechnen Sie auch die Normalform $O^T AO$.

(3) Folgern Sie, dass die Abbildung $x \mapsto Ax$ deine Drehung im $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel dieser Drehung.

Aufgabe 3. (Einsetzen von Matrizen in Funktionen) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine diagonalisierbare Matrix und sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Sei

$$\operatorname{Eig}(A) := \{\lambda \in K : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

Ist dann $f : \operatorname{Eig}(A) \to K$ eine beliebige Funktion, so setzen wir

$$f(A) := S \cdot \left(\operatorname{diag}\left(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\right)\right) \cdot S^{-1} \in M(n \times n, K).$$

Zeigen Sie:

(1) Sind $f, g : \operatorname{Eig}(A) \to K$ zwei Funktionen, so gelten $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$ und $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$, wobei $f \cdot g$ und $f + g$ das punktweise Produkt und die punktweise Summe von f mit g bezeichnen.

(2) Ist $p : K \to K; p(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k$ eine Polynomfunktion, so gilt

$$p(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k \quad (\text{mit } A^0 := E_n).$$

(3) Folgern Sie aus (2), dass $f(A)$ nur von A und nicht von der speziellen Wahl der Matrix S oder der Reihenfolge der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in der Diagonalisierung von A abhängt. (Hinweis: Realisieren Sie die Funktion f auf $\operatorname{Eig}(A)$ durch ein geeignetes Polynom).

Aufgabe 4. (a) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$) heißt *positiv semidefinit*, wenn A selbstadjungiert ist und für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt: $\langle Az, z \rangle \geq 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen:

(1) A ist positiv semidefinit.

(2) Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\lambda \geq 0$.

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ positiv semidefinit, so existiert eine eindeutig bestimmte positiv semidefinite Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $B^2 = A$. (Wir schreiben dann $B =: \sqrt{A}$.)

Abgabe: Montag, den 13.06.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.