Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 7

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ welche Abstände (bezüglich des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$) zwischen zwei Punkten erhält, d.h., es gilt

$$\|T(x) - T(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, wobei $\|z\|_2 = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ für $z \in \mathbb{R}^n$.

(1) Folgern Sie aus den Resultaten der Vorlesung: Sind $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $T_{(A,b)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$T_{(A,b)}(x) = Ax + b,$$

so ist $T_{(A,b)}$ eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$ und jede Bewegung des $\mathbb{R}^n$ ist von diesem Typ.

(2) Für $A, A' \in O(n)$ und $b, b' \in \mathbb{R}^n$ gilt: $T_{(A,b)} = T_{(A',b')}$ genau dann, wenn $A = A'$ und $b = b'$.

Aufgabe 2. (a) Ist $v_0 \in \mathbb{R}^2$ und ist $\alpha \in [0, 2\pi)$, so ist die Drehung $D_{(v_0,\alpha)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um v_0 mit Winkel α gegeben durch die Formel:

$$D_{(v_0,\alpha)}(v) = v_0 + O(\alpha)(v - v_0),$$

wobei $O(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ die Drehmatrix zum Winkel α bezeichnet. Überlegen Sie anhand einer Skizze, dass $D_{(v_0,\alpha)}$ tatsächlich eine Drehung um den Punkt v_0 mit Winkel α beschreibt.

(b) Für $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$ mit $v_0 \neq v_1$ sei $G(v_0, v_1) = v_0 + \mathbb{R}(v_1 - v_0)$ die Gerade durch die Punkte v_0, v_1. Dann ist die *Spiegelung* $S_{(v_0,v_1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Geraden $G(v_0, v_1)$ definiert durch

$$S_{(v_0,v_1)}(v) = v_0 + S_{v_1 - v_0}(v - v_0)$$

wobei $S_{v_1-v_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot (v_1 - v_0)$ bezeichnet. Überlegen Sie anhand einer Skizze, dass $S_{(v_0,v_1)}$ tatsächlich die Spiegelung an der Geraden $G(v_0, v_1)$ beschreibt. Zeigen Sie dann: Es existiert genau ein $\beta \in [0, \pi)$ mit $\mathbb{R} \cdot (v_1 - v_0) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} =: G_\beta$ und dann folgt für alle $v \in \mathbb{R}^2$:

$$S_{(v_0,v_1)}(v) = v_0 + S_\beta(v - v_0),$$

wobei S_β durch Multiplikation mit der orthogonalen Matrix $\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}$ gegeben ist (vergleichen Sie mit Beispiel 6.12 der Vorlesung).

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. **(a)** Zeigen Sie: Die Komposition $T_{(A,b)} \circ T_{(B,c)}$ zweier Bewegungen $T_{(A,b)}, T_{(B,c))}$ ist wieder eine Bewegung. Bestimmen Sie eine Matrix $C \in O(n)$ und einen Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$T_{(A,b)} \circ T_{(B,c)} = T_{(C,d)}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $G_n := \{T_{(A,b)} : A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ aller Bewegungen des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung, eine Gruppe ist. Bestimmen Sie insbesondere eine Formel für das Inverse Element $T^{-1}_{(A,b)}$ (d.h., bestimmen Sie eine Matrix $B \in O(n)$ und ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $T^{-1}_{(A,b)} = T_{(B,c)}$).

Aufgabe 2. Sei $E = x_0 + U$ eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Spiegelung $T_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an E definiert durch

$$T_E(v) := v + 2(P_E(v) - v),$$

wobei $P_E(v)$ die orthogonale Projektion (oder das senkrechte Lot) von v auf E bezeichnet (vergleichen Sie mit Blatt 5).

(1) Fertigen Sie eine Skizze an, die einen optischen Eindruck von der Konstruktion von T_E gibt.
(2) Sei $u \in U^\perp$ mit $\|u\|_2 = 1$. Bestimmen Sie eine Formel für T_E mit Hilfe von u.
(3) Zeigen Sie, dass T_E eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$ ist, und bestimmen Sie ein Element $A \in O(n)$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ (etwa abhängig von den Koordinaten $u_1, \ldots, u_n$ eines Vektors $u \in U^\perp$ wie in (2)) mit $T_E = T_{(A,b)}$.
(4) Sei nun $E = x_0 + \mathrm{LH}\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
Berechnen Sie die Matrix $A \in O(3)$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so dass $T_E = T_{(A,b)}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ist $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung gegeben durch $T(v) = O(\alpha)v + b$ für ein $\alpha \in (0, 2\pi)$ und ein $b \in \mathbb{R}^2$, so existiert ein $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $T = D(v_0, \alpha)$ (vergleiche mit Aufgabe 2 im mündlichen Teil).

Aufgabe 4. Sei nun $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung mit $T(v) = S_\beta(v) + b$ mit S_β die Spiegelung an der Geraden $G_\beta = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix}$, $\beta \in [0, \pi)$. Zeigen Sie:

(1) T ist genau dann eine Spiegelung an einer geeigneten Geraden $G \subseteq \mathbb{R}^2$, wenn $b \in G_\beta^\perp$ gilt. (Zeigen Sie hierzu, dass $\mathrm{Bild}(E_2 - S_\beta) = G_\beta^\perp$ gilt.)
(2) Erfüllt T nicht die Bedingung in (1), so ist T eine *Schubspiegelung* (auch *Gleitspiegelung* genannt), d.h., T ist die Komposition einer Spiegelung an einer Geraden $G = v_0 + G_\beta$ mit einer Verschiebung parallel zur Geraden G_β. (Nutzen Sie $b = c + d$ mit $c \in G_\beta$ und $d \in G_\beta^\perp$.)

Abgabe: Montag, den 06.06.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.