Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 6

Mündliche Aufgaben

Eine alternative Schreibweise für das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ erhält man mit Hilfe der Matrix-Multiplikation. Wenn wir einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ als eine $n \times 1$-Matrix auffassen, so ist $x^T \in M(1 \times n, \mathbb{R})$ und es gilt für das Standard-Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = y^T x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Im $\mathbb{C}^n$ erhalten wir entsprechend die Formel $\langle x, y \rangle = y^* x$ mit $y^* = \bar{y}^T$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Ein Polynom zweiten Grades auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Form

$$p\big((x_1, \ldots, x_n)^T\big) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b,$$

wobei die b_{ij}, die a_i und b reelle Koeffizienten sind.
(a) Zeigen Sie: Es existiert eine **symmetrische** Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ (also $A = A^T$) und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$p(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle a, x \rangle + b \quad (= x^T A x + a^T x + b),$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
(b) Sei nun $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p\big((x_1, \ldots, x_4)^T\big) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1 x_2 - x_2 x_3) + x_1 - 3x_4 + 5.$$

Bringen Sie p auf die Form $p(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle a, x \rangle + b$ wie in Teil (a).

Aufgabe 2. Eine Abbildung $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *quadratische Form*, wenn eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ existiert mit $q(x) = \langle Ax, x \rangle$. Ist $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle a, x \rangle + b$ ein Polynom zweiten Grades wie in Aufgabe 1, so heißt $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; q(x) = \langle Ax, x \rangle$ die zugehörige quadratische Form.
(a) Zeigen Sie: Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $2Ax_0 = a$, so existiert ein $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit

$$p(x - x_0) = q(x) + \tilde{b} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Das heißt in diesem Fall lässt sich p durch Verschieben des Ursprungs in eine quadratische Form (plus eine Konstante) überführen.
(b) Überführen Sie das Polynom $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 1.(b) durch eine geeignete Verschiebung des Ursprungs auf die Form $q(x) + \tilde{b}$ wie in (a).

Aufgabe 3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler unitärer oder euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Wir fassen die orthogonale Projektion $P_U : V \to U \subseteq V$ als Endomorphismus von V auf. Zeigen Sie:

(1) Es gilt $P_U = P_U^* = P_U^2$.
(2) Ist $P \in \mathrm{End}(V)$ ein beliebiger Endomorphismus mit $P = P^* = P^2$, so existiert genau ein Untervektorraum U von V mit $P = P_U$.

Aufgabe 4. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlich-dimensionale unitäre bzw. orthogonale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir sagen, F ist *unitär*, wenn $F^* \circ F = \mathrm{id}_V$ und $F \circ F^* = \mathrm{id}_W$ gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) F ist unitär (bzw. orthogonal).

(2) Es gilt $\dim(V) = \dim(W)$ und für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\langle F(v_1), F(v_2)\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V.$$

(3) Es gilt $\dim(V) = \dim(W)$ und für alle $v \in V$ gilt $\|F(v)\|_W = \|v\|_V$.

(Vergleichen Sie mit Satz 6.8 der Vorlesung.)

Abgabe: Montag, den 30.05.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.