Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 5

Mündliche Aufgaben

Bezeichungen: Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$, wenn ein k-dimensionaler Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren mit

$$E = x_0 + U := \{x_0 + u : u \in U\}.$$

Der Punkt x_0 heißt dann *Aufhängepunkt* von E und U heißt der *zu E gehörende Untervektorraum* von V. Ist $\{v_1, \dots v_k\}$ eine Basis von U, so folgt

$$E = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

In dieser Darstellung nennt man die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ auch *Richtungsvektoren* von E. Eine $(n-1)$-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$ heißt *Hyperebene* des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 1. Überlegen Sie sich die folgenden Tatsachen:

(1) Eine 1-dimensionale Ebene ist eine Gerade.

(2) Für jedes $x \in E$ gilt $E = x + U$ und $U = E - x$. Insbesondere ist U eindeutig durch E festgelegt.

(3) Ist $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$ fest, so ist die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ des LGS $Ax = b$ entweder die leere Menge oder eine k-dimensionale Ebene mit $k = \dim(\mathrm{Kern}(A))$.

Aufgabe 2. Ist $E = x_0 + U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Ebene, und ist $v \in \mathbb{R}^n$ fest, so definieren wir das senkrechte Lot $P_E(v)$ von v auf E durch

$$P_E(v) = x_0 + P_U(v - x_0).$$

Machen Sie sich anhand einer 2-dimensionalen Skizze deutlich, dass diese Definition sinnvoll ist.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Ebene mit Aufhängepunkt x_0 und zugehörigem Untervektorraum U. Sei $\{u_1, \dots, u_{n-k}\}$ eine Basis von $U^\perp$ (bezüglich des Standard Skalarprodukts). Zeigen Sie:

(1) Es gilt $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle = 0 \, \forall \, 1 \leq i \leq n-k\}$.

(2) Es gilt $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle = \langle x_0, u_i \rangle \, \forall \, 1 \leq i \leq n-k\}$.

(3) Sei $A \in M((n-k) \times n, \mathbb{R})$ die Matrix mit den Zeilen $u_1^T, \dots, u_{n-k}^T$ und sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gegeben durch $b_i := \langle x_0, u_i \rangle$, $1 \leq i \leq n-k$. Dann ist E die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$.

Aufgabe 2. **(a)** Seien $E = x_0 + U \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in Aufgabe 1 und sei nun $\{u_1, \dots, u_{n-k}\}$ eine ONB von $U^\perp$. Zeigen Sie:

(1) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $P_E(x) = x - \sum_{i=1}^{n-k} \langle x - x_0, u_i \rangle u_i$.

(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(x, E)^2 = \sum_{i=1}^{n-k} |\langle x - x_0, u_i \rangle|^2$, wobei

$$d(x, E) = \inf\{\|x - v\|_2 : v \in E\}$$

den Abstand von x zur Ebene E bezeichnet.

(b) Sei nun $E = x_0 + U$ eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ und sei $u \in U^\perp$ mit $\|u\|_2 = 1$. Ferner sei $\beta := \langle x_0, u\rangle$. Zeigen Sie:

(1) Der Vektor u ist, bis auf das Vorzeichen, durch die Bedingungen $u \in U^\perp$ und $\|u\|_2 = 1$ eindeutig festgelegt, d.h., ist $u' \in U^\perp$ ein weiterer Vektor mit $\|u'\|_2 = 1$ so gilt $u' = u$ oder $u' = -u$.
(2) Es gilt $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = \beta\}$ (Hessesche Normalform).
(3) Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(x, E) = |\langle x, u\rangle - \beta|$.

Nur mündlich: Überlegen Sie sich zusätzlich: Ist $\langle x, u\rangle > \beta$, so liegt x auf der Seite von E in die der Vektor u zeigt. Ist $\langle x, u\rangle < \beta$, so liegt x auf der Seite von E in die $-u$ zeigt.

Aufgabe 3. Es seien

$$x_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Ferner seien $E = x_0 + U \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $U = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3\}$

(1) Berechnen Sie einen Vektor $u \in U^\perp$ mit $\|u\| = 1$ und bringen Sie E auf Hessesche Normalform.
(2) Berechnen Sie das senkrechte Lot $P_E(x)$ von x auf E.
(3) Berechnen Sie den Abstand $d(x, E)$. Auf welcher Seite von E (relativ zu u) liegt der Vektor x?

Aufgabe 4. (a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $A = A^*$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(1) A ist positiv definit.
(2) A ist invertierbar und A^{-1} ist positiv definit.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2(x_3y_1 + x_1y_3)$$

gegebene Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, ob durch $\langle x, y\rangle_f := f(x, y)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird. Was passiert, wenn wir anstelle von f die Bilinearform

$$g(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3(x_3y_1 + x_1y_3)$$

betrachten? Ist $\langle x, y\rangle_g = g(x, y)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

Abgabe: Montag, den 23.05.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.