Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 4

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Ferner sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Dieses definiert dann durch Einschränken beider Variablen auf U ein Skalarprodukt auf U (warum?).

(1) Berechnen Sie eine ONB $\{v_1, v_2\}$ von U. Skizzieren Sie die Vektoren v_1, v_2 so gut es geht in einer räumlichen Skizze.
(2) Berechnen Sie die orthogonalen Projektionen $P_U(e_1), P_U(e_2), P_U(e_3)$ für die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 in $\mathbb{R}^3$.
(3) Berechnen Sie die Abstände $d(e_i, U)$, $i = 1, 2, 3$.
(4) Ergänzen Sie $\{v_1, v_2\}$ zu einer ONB $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$.
(5) Berechnen Sie eine ONB für $U^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $0 \neq v_0 \in V$. Ist dann $U = \mathbb{K} \cdot v_0$, so ist die orthogonale Projektion $P_U : V \to U$ für alle $v \in V$ gegeben durch

$$P_U(v) = \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0.$$

Der Abstand $d(v, U)$ eines Elements $v \in V$ zur "Geraden" $U = \mathbb{K} \cdot v$ ist dann gegeben durch

$$d(v, U) = \|v - P_U(v)\| = \left\| v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \right\|.$$

Versuchen Sie sich die Aussagen dieser Aufgabe durch eine geeignete Skizze in der Ebene zu veranschaulichen!

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum von V (U ist dann eine *Hyperebene* in V). Ferner sei $0 \neq v_0 \in U^\perp$. Zeigen Sie:

(1) $U^\perp = \mathbb{K} \cdot v_0$.
(2) Die orthogonale Projektion $P_U : V \to U$ ist gegeben durch die Formel

$$P_U(v) = v - P_{U^\perp}(v) = v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0.$$

(3) Der Abstand von $v \in V$ zur Hyperebene U ist gegeben durch die Formel

$$d(v, U) = \frac{|\langle v, v_0 \rangle|}{\|v_0\|^2}.$$

Aufgabe 2. Für zwei Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei das *Kreuzprodukt* $x \times y \in \mathbb{R}^3$ definiert durch $x \times y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ mit

$$z_1 = \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \quad z_2 = -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(1) Es gilt $x \times y \perp x$ und $x \times y \perp y$.
(2) Es gilt $x \times y \neq 0 \Leftrightarrow x, y$ sind linear unabhängig.
(3) Ist $U = \mathrm{LH}\{x, y\}$ der von x, y aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, so lässt sich die orthogonale Projektion $P_U : \mathbb{R}^3 \to U$ schreiben als

$$P_U(v) = v - \frac{\langle v, x \times y \rangle}{\|x \times y\|^2} x \times y.$$

Aufgabe 3. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und sei $U = \mathrm{LH}\{x, y\}$. Ferner seien $e_1, e_2, e_2 \in \mathbb{R}^3$ die Einheitsvektoren. Berechnen Sie die orthogonalen Projektionen $P_U(e_i)$ und die Abstände $d(e_i, U)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ das in Blatt 3, Aufgabe 4 definierte Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[T]$. Berechnen Sie eine ONB $\{q_0, \ldots, q_3\}$ des Untervektorraums $U = \mathbb{R}_3[T]$ der Polynome vom Grad ≤ 3 bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$. Berechnen Sie dann für alle $n \in \mathbb{N}$:

(1) Die orthogonale Projektion $P_U(T^n)$ des Polynoms T^n auf U, und
(2) den Abstand $d(T^n, U)$ von T^n nach U.

Die Aufgabenteile (1) und (2) sind freiwillige Zusatzaufgaben und geben jeweils einen extra Punkt!

Abgabe: Montag, den 09.05.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.