Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 2

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. (a) Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ gegeben durch

$$p(T) = T^8 + 2T^6 - 4T^4 - 8T^2.$$

Berechnen Sie die Zerlegung von p wie in Satz 1.6 der Vorlesung. Bestimmen Sie die algebraischen Vielfachheiten aller (reellen) Nullstellen von p.
(b) Sei nun p wie in (a) aufgefasst als Polynom in $\mathbb{C}[T]$. Berechnen Sie die Zerlegung von p in Linearfaktoren und bestimmen Sie die algebraischen Vielfachheiten aller (komplexen) Nullstellen.

Aufgabe 2. Sei A eine Blockmatrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_{l-1,l} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ll} \end{pmatrix},$$

wobei alle Matrizen auf den Diagonalen A_{ii} quadratische Matrizen sind, und alle Blockmatrizen unterhalb der Diagonalen die Nullmatrizen sind. Zeigen Sie: Dann ist das charakteristische Polynom von A gleich dem Produkt der charakteristischen Polynome der Matrizen A_{ii}, $i = 1, \ldots, l$, d.h., es gilt die Formel

$$\chi_A(T) = \chi_{A_{11}}(T) \cdot \chi_{A_{22}}(T) \cdots \chi_{A_{ll}}(T).$$

Aufgabe 3 (a). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M(8 \times 8, \mathbb{R})$$

Berechnen Sie alle (reellen!) Eigenwerte von A sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?
(b) Fassen Sie nun A als Matrix in $M(8 \times 8, \mathbb{C})$ auf. Berechnen Sie alle komplexen Eigenwerte von A sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist A dann diagonalisierbar?

Siehe Rückseite!

Aufgabe 4. Sei $V = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \mathbb{C}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Beweisen Sie, dass $\mathcal{C} := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis von V ist.

(2) Sei $F : V \to V$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} F(v_1) &= 2(v_1 + v_2 - v_3 - v_4), \quad & F(v_2) &= -v_3 + 2v_4, \\ F(v_3) &= 2(v_2 - v_4), & F(v_4) &= 2v_4. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $A_F^{\mathcal{C}}$ von F bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

(3) Sei F wie oben. Untersuchen Sie F auf Diagonalisierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls eine Basis von V aus Eigenvektoren von F.

Abgabe: Freitag, den 22.04.2016 um 8Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.