Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 9

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$ und sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; F(x) := Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(1) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ und $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ sind Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
(2) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{B}'}A_F^{\mathcal{B}}$ von F bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

Aufgabe 2. Sei $C[0, 2\pi] = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig}\}$ und sei $W = \mathrm{LH}\{\sin, \cos\} \subseteq C[0, 2\pi]$. Ferner sei $F : W \to W; F(f) = f'$, wobei $f' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ die Ableitung von f bezeichnet (Hinweis: Es gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$). Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\sin, \cos\}$ eine Basis von W ist und berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}A_F^{\mathcal{B}}$ von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in M(m \times n, K)$ gilt

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A).$$

(b) Berechnen Sie eine Basis von Kern(A) und die vollständige Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Rang der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir wünschen allen Teilnehmern unserer Übungen ein schönes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Schriftliche Aufgaben

Als Weihnachtsgeschenk gibt es auf die erzielten Punkte jeweils 50% Bonus!

Aufgabe 1. Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Zeigen Sie, dass genau eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ existiert mit $F(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

(2) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ wie in (1) und seien $\mathcal{S}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\mathcal{S}_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{S}_4}A_F^{\mathcal{S}_3}$ von F bezüglich $\mathcal{S}_3$ und $\mathcal{S}_4$.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und sei $V = K_n[T]$ der K-Vektorraum aller Polynome über K vom Grad $\leq n$. Sei $F : K_n[T] \to K_n[T]$ die lineare Abbildung definiert durch $F(p) = p' - p$, wobei für $p(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$ das Polynom p' definiert ist durch $p'(T) = \sum_{k=1}^n k a_k T^{k-1}$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}A_F^{\mathcal{B}}$ von F bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, T, \ldots, T^n\}$ von $K_n[T]$. Ist F ein Isomorphismus?

Aufgabe 3. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ sowie alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2, 3$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ebenfalls den Rang von A.

Aufgabe 4. Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Ferner sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix $A := {}^{\mathcal{B}'}A_F^{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Zeigen Sie:

(1) Seien $\Phi_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ und $\Phi_{\mathcal{B}'} : W \to K^m$ die durch $\Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = e_j$ bzw. $\Phi_{\mathcal{B}'}(w_i) = e_i$ festgelegten Isomorphismen. Dann gelten

$$\mathrm{Kern}(F) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathrm{Kern}(A)) \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(F) = \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(\mathrm{Bild}(A)).$$

(2) Sind $\{y_1, \ldots, y_l\}$ und $\{z_1, \ldots, z_k\}$ Basen von $\mathrm{Kern}(A)$ bzw. $\mathrm{Bild}(A)$, so sind $\{\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(y_1), \ldots, \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(y_l)\}$ und $\{\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(z_1), \ldots, \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(z_k)\}$ Basen von $\mathrm{Kern}(F)$ bzw. $\mathrm{Bild}(F)$.

(3) Berechnen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(F)$ und $\mathrm{Bild}(F)$ mit $F : \mathbb{R}_5[T] \to \mathbb{R}_4[T]$ mit $F(T^k) = p_{k+1}$, $k = 0, \ldots, 5$, mit p_k wie in Blatt 8, Aufgabe 3.

Abgabe: Montag, den 11.01. 2016 um 8:30Uhr