Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 8

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Basen und Dimension der folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume $V_1, \ldots, V_4$:

(1) $V_1 = \mathbb{C}$.

(2) $V_2 = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) $V_3 = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(4) $V_4 = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Seien V_2, V_3, V_4 wie in Aufgabe 1 und seien jeweils v_1, v_2, v_3 die in Aufgabe 1 angegebenen Erzeuger.
(a) Für welche der Räume $V_k, k = 2, 3, 4$, ist die folgende Aussage korrekt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $F : V_k \to \mathbb{R}^3$ mit $F(v_i) = e_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$, wobei e_i den i-ten Einheitsvektor von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.
(b) Für welche der Räume $V_k, k = 2, 3, 4$, ist die folgende Aussage korrekt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to V_k$ mit $F(e_i) = v_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_k$ ein System linear unabhängiger Vektoren in V. Zeigen Sie: Ist dann $v \in V$ mit $v \notin \mathrm{LH}\{v_1, \ldots, v_k\}$, so ist auch $v, v_1, \ldots, v_k$ ein System linear unabhängiger Vektoren.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$. Zeigen Sie: Ist dann $W \subseteq V$ ein Untervektorraum von V mit $\dim_K(W) = n$, so gilt $W = V$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. (a) Sei $V = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \subseteq \mathbb{R}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Basis von V und bestimmen Sie die Dimension von V.

(b) Berechnen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Bild}(A)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei V ein K-Vektorraum und sei $F : V \to K^n$ ein Isomorphismus. Ferner sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Sind $w_1, \ldots, w_k$ Vektoren in W so gilt:

$$\{w_1, \ldots, w_k\} \text{ ist Basis von } W \Leftrightarrow \{F(w_1), \ldots, F(w_k)\} \text{ ist Basis von } F(W).$$

Aufgabe 3. Benutzen Sie das Resultat von Aufgabe 2 um eine Basis des Untervektorraums $W \subseteq \mathbb{R}_4[T]$ zu berechnen, wenn $W = \mathrm{LH}\{p_1, \ldots, p_6\}$ mit

$$\begin{array}{ll} p_1(T) = 1 + T + T^3 + T^4 & p_2(T) = 1 + T^2 + T^4 \\ p_3(T) = T + T^3 & p_4(T) = 2 + T + T^3 + 2T^4 \\ p_5(T) = T^2 & p_6(T) = 2 + T^2 + 2T^4. \end{array}$$

Aufgabe 4. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $\{0\} \neq W \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: Dann ist auch W endlich erzeugt mit $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es eine größte natürliche Zahl $k \leq \dim_K(V)$ gibt, so dass ein System von k linear unabhängigen Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ in W existiert. Zeigen Sie dann, dass $W = \mathrm{LH}\{w_1, \ldots, w_k\}$ gilt.

Wer Aufgabe 4 vollständig (und richtig) löst, bekommt 2 Zusatzpunkte!

Abgabe: Montag, den 21.12. 2015 um 8:30Uhr