Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 4

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $K = \{0, 1\}$ mit Addition und Multiplikation gegeben durch

$$0 + 0 = 0 = 1 + 1, \quad 1 + 0 = 1 = 0 + 1, \quad 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad \text{und } 1 \cdot 1 = 1.$$

Überprüfen Sie die Behauptung der Vorlesung, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 2. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = (1 + i) + (2 + i)^2, \quad z_2 = \frac{1 + i}{2 - i}, \quad z_3 = \frac{1}{i^5}.$$

Bestimmen Sie auch jeweils $|z_k|$, $\mathrm{Re}(z_k)$, $\mathrm{Im}(z_k)$ und $\overline{z_k}$ für $k = 1, 2, 3$.

Aufgabe 3. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten:

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

Aufgabe 4. Finden Sie vier verschiedene Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Definieren Sie eine Addition "+" und eine Multiplikation "$\cdot$" auf $K = \{0, 1, 2\}$, so dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.
Hinweis: Um viel langweiliges Aufschreiben zu vermeiden erspare ich Ihnen das Nachrechnen der Assoziativgesetze für Addition und Multiplikation. Alle anderen Körperaxiome sollten Sie aber nachweisen!

Aufgabe 2. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:
a) $(3 + i)(4 - i)$, $\quad \frac{(2-i)(3+i)}{1+i}$.
b) $(1 + i)^k$, $k = 1, 2, 3, 4$.
c) $(1 + i)^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Hier benutzen wir die folgende Schreibweise: Ist K ein Körper und $x \in K$ mit $x \neq 0$, so definieren wir für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$: $z^k := (z^{-1})^{-k} = \frac{1}{z^{-k}}$.

Aufgabe 3. a) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ hat die quadratische Gleichung

$$z^2 + az + b = 0$$

mindestens eine und höchstens zwei Lösungen $z \in \mathbb{C}$. Wann gibt es zwei verschiedene Lösungen?
b) Wie sieht die allgemeine komplexe Lösung der Gleichung $z^2 + az + b = 0$ aus, wenn a und b reell sind?

Aufgabe 4. a) Finden Sie drei verschiedene Lösungen $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ der Gleichung $z^3 = 1$.
b) Zeigen Sie: Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$ existieren drei verschiedene Lösungen der Gleichung $z^3 = w$.
c) Skizzieren Sie die Lage der Lösungen von **a)** und **b)** in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Aufgabe 5. (Knobelaufgabe für extra Punkte) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = 1$ (genau) n verschiedene Lösungen $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ in $\mathbb{C}$. Diese heißen die *n-ten Einheitswurzeln*. Skizzieren Sie die Lage der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$!

Abgabe: Montag, den 23.11. 2015 um 8:30Uhr