Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 13

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$. Wiederholen Sie die Begriffe "Diagonalisierbarkeit", "Eigenwert" und "Eigenvektor" eines Endomorphismus $F : V \to V$ (bzw. einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$). Wiederholen Sie auch die Argumente dafür, dass die Eigenwerte von F genau die Nullstellen der charakteristischen Polynomfunktion $\chi_F : K \to K$ sind.
Zur Bezeichnung: Ist $A \in M(n \times n, K)$ so sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A definiert als die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $F_A : K^n \to K^n; F_A(x) = A \cdot x$.

Aufgabe 2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Sei $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ eine Basis von V und sei $A = A_F^{\widetilde{\mathcal{B}}}$ die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\widetilde{B}$. Machen Sie sich die folgenden Sachverhalte klar:

(1) Ist $\lambda \in K$, so ist λ ein Eigenwert von F genau dann, wenn λ ein Eigenwert von A ist, und für einen Vektor $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt: s ist genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für A, wenn $v = \sum_{i=1}^n s_i \tilde{v}_i$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für F ist.

(2) Ist $S \in GL(n, K)$ mit $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A (und von F) und die Spalten $s_1, \ldots, s_n \in K^n$ von S bilden eine Basis $\{s_1, \ldots, s_n\}$ aus Eigenvektoren von A für K^n. Hierbei ist s_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für alle $1 \leq i \leq n$.

(3) Ist S wie in (2), und sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben durch $v_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \tilde{v}_i$, so ist $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von F und es gilt $A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Hierbei ist v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für alle $1 \leq i \leq n$.

(4) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{B}$ wie in (3), so gilt

$$\chi_F(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{id}_V - F) = \det(\lambda E_n - A_F^{\mathcal{B}}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i).$$

Die mündlichen Aufgaben werden wir in der letzten Semesterwoche in der Vorlesung besprechen!

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. (a) (6 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Berechnen Sie die charakteristische Polynomfunktion sowie die Eigenwerte und Eigenräume von A (über $\mathbb{R}$!).

(b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$. Berechnen Sie die charakteristische Polynomfunktion sowie die Eigenwerte und Eigenräume von A (über $\mathbb{C}$!).

(c) Untersuchen Sie in beiden Fällen die Matrix A auf Diagonalisierbarkeit, und berechnen Sie gegebenenfalls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Für einen Körper K sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, K)$ der K-Vektorraum aller K-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei $V = \mathrm{LH}\{\cos, \sin, \exp\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie:

(1) $\mathcal{B} = \{\cos, \sin, \exp\}$ ist eine Basis von V.

(2) Für jede Funktion $f \in V$ gilt auch $f' \in V$, wobei f' die Ableitung von f bezeichnet, und die Abbildung $D : V \to V; Df := f'$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $A = A_D^{\mathcal{B}}$ und berechnen Sie die charakteristische Polynomfunktion sowie die Eigenwerte und Eigenräume von D. Ist D diagonalisierbar?

(c) Sei nun $V = \mathrm{LH}\{\cos, \sin, \exp\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $D : V \to V, Df = f'$ ist $\mathbb{C}$-linear (eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion heißt differenzierbar, wenn $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ differenzierbar sind, und dann gilt $f' = (\mathrm{Re}\, f)' + (\mathrm{Im}\, f)')$. Zeigen Sie, dass $D : V \to V$ diagonalisierbar ist und berechnen Sie eine Basis aus Eigenvektoren für D.

Freiwillige Zusatzaufgabe (6 Punkte) Sei K ein Körper und seien $a_0, \dots a_{n-1} \in K$. Ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

Bweisen Sie (etwa durch Induktion nach n), dass

$$\det(\lambda E_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k.$$

Damit ist gezeigt, dass jedes normierte Polynom als charakteristisches Polynom einer geeigneten Matrix realisiert werden kann.

Abgabe: Dienstag, den 09.02. 2016 um 10:00Uhr