Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 12

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. In einer früheren Aufgabe sollten Sie sich überlegen, dass für eine lineare Abbildung $F : V \to W$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_l \in V$ gilt: Sind $F(v_1), \ldots, F(v_l)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \ldots, v_l$ linear unabhängig. Überlegen Sie sich noch einmal den Beweis für diese Tatsache.

Aufgabe 2. Für $x \in K^n$ und $I = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_s < i_t$ für alle $1 \leq s < t \leq n$, sei x_I der Vektor in K^l der aus x durch Streichen aller Einträge x_i mit $i \notin I$ entsteht. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F_I : K^n \to K^l, F_i(x) = x_I$ linear ist.

Aufgabe 3. Wiederholen Sie die wichtigsten Definitionen und Sätze zur Determinante von Matrizen.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$ eine Blockmatrix mit $n = k + l$, $B \in M(k \times k, K)$ und $C \in M(l \times l, K)$. Beweisen Sie: $\det_n(A) = \det_k(B) \cdot \det_l(C)$.

Aufgabe 2. Es seien $v_1, \ldots, v_l \in K^n$ mit $l \leq n$ und $A = (v_1, \ldots, v_l) \in M(n \times l, K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_l$. Für jedes $I = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_s < i_t$ für alle $1 \leq s < t \leq l$, sei $A_I \in M(l \times l, K)$ die Matrix, die aus A durch Streichen aller Zeilen a_i mit $i \notin I$ entsteht. Zeigen Sie: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_l$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für mindestens eine der Matrizen A_I gilt: $\det_l(A_I) \neq 0$.
Hinweis: Für eine Richtung beachten Sie die mündlichen Aufgaben. Für die andere Richtung könnten elementare Spaltenumformungen helfen.

Aufgabe 3. Sei $A \in M((n-1) \times n, K)$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n - 1$. Für alle $1 \leq j \leq n$ sei A_j die Matrix, die aus A durch Streichen der j-ten Spalte entsteht. Dann gilt $\mathrm{Kern}(A) = K \cdot x$ wobei $x \in K^n$ gegeben ist durch

$$x_j = (-1)^j \det(A_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Hinweis: Betrachten Sie für jedes $1 \leq i \leq n-1$ die Determinante der erweiterten $n \times n$-Matrix $\tilde{A}_i$, die aus A durch hinzufügen der i-ten Zeile von A als n-te Zeile entsteht.

Aufgabe 4.(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie alternativ nun die Lösung des LGS $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Welcher Lösungsweg ist weniger aufwändig?

Abgabe: Montag, den 01.02. 2016 um 8:30Uhr