Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 10

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^3$ der durch die Vektoren $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Geben Sie mindestens drei verschiedene Komplementärräume $\tilde{W}_i$, $i = 1, 2, 3$ für W an.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei W ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: Sind $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2$ zwei Komplementärräume zu W in V, so existiert ein Isomorphismus $\Phi : \tilde{W}_1 \to \tilde{W}_2$.

Aufgabe 3. Für K-Vektorräume W_1, W_2 versehen wir das kartesische Produkt

$$W_1 \times W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \right\}$$

mit der Addition $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_1' \\ w_2 + w_2' \end{pmatrix}$ und der Multiplikation mit Skalaren $\lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \end{pmatrix}$, wenn $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} \in W_1 \times W_2$ und $\lambda \in K$. Zeigen Sie:

(1) $W_1 \times W_2$ ist ein K-Vektorraum.

(2) Identifizieren wir W_1 und W_2 mit den Untervektorräumen $W_1 \times \{0\}$ und $\{0\} \times W_2$ von $W_1 \times W_2$ vermöge $w_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $w_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$, so gilt $W_1 \times W_2 = W_1 \oplus W_2$, die direkte Summe von W_1 mit W_2.

(3) Ist V ein beliebiger K-Vektorraum und sind W_1, W_2 Untervektorräume von V mit $V = W_1 \oplus W_2$, so ist

$$\Phi : W_1 \times W_2 \to V; \Phi \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right) = w_1 + w_2$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Seien $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times l, K)$. Zeigen Sie:

(1) Es gilt $\mathrm{Rang}(A \cdot B) \leq \mathrm{Rang}(A)$ und $\mathrm{Rang}(A \cdot B) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

(2) Sind $A, B \in M(n \times n, K)$, so gilt:

$$A \cdot B \text{ invertierbar } \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind invertierbar.}$$

Aufgabe 2. Sei V ein K-Vektorraum und sei $P : V \to V$ linear und idempotent, d.h., es gilt $P^2 = P$ (wobei wir $P^2 := P \circ P$ setzen). Sie sollen Satz 12.7 der Vorlesung beweisen. Beweisen Sie dazu die folgenden Aussagen:

(1) Mit P ist auch $Q := \mathrm{id}_V - P$ idempotent und es gilt $PQ = 0 = QP$.

(2) Es gilt $P(w) = w$ und $Q(u) = u$ für alle $w \in P(V)$ und $u \in Q(V)$.

(3) Es gilt $V = P(V) \oplus Q(V)$.

(4) Es gilt $\mathrm{Kern}(P) = Q(V)$ und $\mathrm{Kern}(Q) = P(V)$.

Aus (3) und (4) folgt dann $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.

Aufgabe 3. Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ gegeben und es sei $W = \mathrm{LH}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie eine Basis für einen Komplementärraum $\tilde{W}$ von W in $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Sei $W_1 \times W_2$ das kartesische Produkt von W_1 und W_2 wie in Aufgabe 3 des mündlichen Teils. Sei $F : W_1 \times W_2 \to V$ definiert durch $F\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$. Benutzen Sie die Dimensionsformel für die lineare Abbildung $F : W_1 \times W_2 \to V$ um einen alternativen Beweis der Dimensionsformel

$$\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2) - \dim_K(W_1 \cap W_2)$$

aus Satz 12.2 der Vorlesung zu erhalten.

Abgabe: Montag, den 18.01. 2016 um 8:30Uhr