Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS 2015/16
Blatt 1

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Es seien A, B und C mathematische Aussagen. Überzeugen Sie sich (evtl. mit Hilfe von Wahrheitstafeln) von der Richtigkeit der folgenden Aussagen:

(a) $\big[A \vee (B \vee C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \vee B) \vee C\big]$,
(b) $\big[A \wedge (B \wedge C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \wedge B) \wedge C\big]$,
(c) $\big[A \vee (B \wedge C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \vee B) \wedge (A \vee C)\big]$,
(d) $\big[A \wedge (B \vee C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big]$,
(e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

Überzeugen Sie sich auch von der Richtigkeit der Aussagen in Lemma 1.6 der Vorlesung!

Aufgabe 2. Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Alle Männer sind schlau und alle Frauen sind schön.
(b) Es gibt einen Tenor der nicht singen kann oder alle Schauspieler spielen schlecht.
(c) In jeder Vorlesung an der Uni gibt es mindestens eine/n Studierende/n die/der immer so viel Lärm macht, dass alle anderen nichts verstehen können.

Aufgabe 3. Diskutieren Sie mit Ihren Freunden (und in der Übung) den folgenden Induktionsbeweis:

Herr K stellt die kühne Behauptung auf, dass sich Frauen und Männer unmöglich gleichzeitig im selben geschlossenen Raum aufhalten können!

Um diese Behauptung zu belegen, beweist Herr K mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Halten sich n Personen in einem geschlossenen Raum auf, so haben alle dasselbe Geschlecht.

Beweis: Der Fall $n = 1$ ist klar.

Die Aussage sei nun wahr für n. Sind dann $n + 1$ Personen im Raum, so wähle eine Person aus und schicke sie hinaus. Nach obiger Annahme (die Aussage sei wahr für n) haben die im Raum verbliebenen Personen alle dasselbe Geschlecht. Wir holen die ausgewählte Person wieder herein und senden eine andere Person hinaus. Die im Raum verbliebenen n Personen haben dann wieder dasselbe Geschlecht. Damit hat die zuerst hinaus gesandte Person dasselbe Geschlecht wie alle anderen im Raum befindlichen Personen. Da dies nach dem ersten Beweisschritt auch für die als zweites hinaus gesandte Person zutrifft, haben alle $n + 1$ Personen dasselbe Geschlecht.

Aufgabe 4. Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert auch wie folgt:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine Aussage.
Induktionsanfang: Zeige A_1 ist wahr.
Induktionsschluss: Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow A_{n+1}$.

Beweisen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Prinzips der vollständigen Induktion, dass nach erfolgreicher Durchführung beider Schritte die Wahrheit aller A_n bewiesen ist.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Zu finden sind zwei natürliche Zahlen die echt zwischen 1 und 100 liegen. "Herr Produkt" kennt das Produkt der Zahlen und "Herr Summe" kennt die Summe der Zahlen. Herr Produkt und Herr Summe führen die folgende Unterhaltung:

Herr Produkt: "Ich kenne die beiden Zahlen nicht."

Herr Summe: "Ich kenne die beiden Zahlen auch nicht, aber ich wusste, dass Sie die Zahlen nicht kennen."

Herr Produkt: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt."

Herr Summe: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt auch."

Welches der folgenden Zahlenpaare ist die richtige Lösung? (Wir setzen voraus, dass eines der angegebenen Paare richtig ist!)

3 und 5, 2 und 7, 8 und 11, 4 und 13.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde einem "Selbsttest für angehende Informatik-Studenten" der TU-München entnommen.

Aufgabe 2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n: Sind $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$, so ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Teilmengen $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit k-Elementen.

Aufgabe 3. (a) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten die Formeln:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(b) Beweisen Sie: Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ hat insgesamt 2^n verschiedene Teilmengen.

Bemerkung: Ist M eine Menge, so heißt die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M, also

$$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \text{ ist Teilmenge von } M\},$$

die *Potenzmenge* von M.

Aufgabe 4. Bei einem Schulexperiment in einer Klasse mit hochbegabten Schülerinnen wurde wie folgt vorgegangen: Die Lehrerin klebt jeder Schülerin einen Punkt auf die Stirn. Die Punkte waren entweder gelb oder schwarz. Jede Schülerin konnte die Punkte aller anderen sehen, aber nicht ihren eigenen Punkt. Ferner wissen alle Schülerinnen, dass mindestens ein gelber Punkt verteilt wurde!

Die Lehrerin gab dann die folgende Verhaltensvorschrift aus: Nach jeweils 10 vollen Minuten schlägt sie einen Gong. Alle Schülerinnen, die zum Zeitpunkt eines Gongschlags wüssten (durch schlaues Nachdenken!), dass Sie einen gelben Punkt auf der Stirn hätten, sollten dann zur Tafel gehen. Nach dem achten Gongschlag begab sich (erstmals) eine Gruppe von Schülerinnen zur Tafel.

Frage: Wieviele Schülerinnen gingen zur Tafel? (Wir setzen hier voraus, dass alle teilnehmenden Schülerinnen in der Lage waren, diese Aufgabe zu lösen!)

Abgabe, Montag, den 2.11. 2015 um 8:30Uhr