2. Ergänzung zur Vorlesung “Analysis I” WS08/09

Konstruktion von $\mathbb{R}$

In dieser Ergänzung möchte ich eine Konstruktion des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen vorstellen. Ich werde nicht alle Details vorrechnen, aber ich hoffe zumindest die Idee der Konstruktion klar zu machen. Wie Sie sehen werden, werden die Elemente von $\mathbb{R}$ in dieser Kontruktion geeignete Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sein, d.h., wir erhalten $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Wir starten mit

Definition. Eine Teilmene $S \subseteq \mathbb{Q}$ heißt *Dedekindscher Schnitt*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

S1 $S \neq \emptyset$ und $S \neq \mathbb{Q}$.
S2 Ist $a \in S$, so folgt auch $b \in S$ für alle $b \in \mathbb{Q}$ mit $b \geq a$.
S3 S besitzt kein kleinstes Element.

Feststellung: Ist $S \subseteq \mathbb{Q}$ ein Dedekindscher Schnitt und ist $a \in \mathbb{Q} \setminus S$, so gilt $a < x$ für alle $x \in S$. Denn wäre $x \in S$ mit $a \geq x$, so würde aus **S2** auch $a \in S$ folgen.

Beispiel: (a) Jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ können wir auf kanonische Weise einen Schnitt $S_x := \{y \in \mathbb{Q} : y > x\}$ zuordnen. Wichtig ist hier, dass wir wirklich $y > x$ fordern. Die Menge $\{y \in \mathbb{Q} : y \geq x\}$ erfüllt sicher die bedingungen **S1** und **S2**, aber nicht die Bedingung **S3**.

(b) Betrachte $S = \{y \in \mathbb{Q} : y \geq 0, y^2 > 2\}$. Es ist dann leicht zu sehen, dass S die Bedingungen **S1**,...,**S3** erfüllt. Es gilt $S \neq S_x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Denn wäre $S = S_x$ für ein $x \in \mathbb{Q}$, so wäre zunächst $x \geq 0$, da $y \geq 0$ für alle $y \in S$. Ferner wäre $x \notin S$, woraus dann $x^2 < 2$ folgen würde (denn $x^2 = 2$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$). Setze $\varepsilon := 2 - x^2 > 0$. Da $\mathbb{Q}$ archimedisch ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2x+1}{\varepsilon}$. Dann folgt $\frac{2x+1}{N} < \varepsilon$ und wir erhalten $(x + \frac{1}{N})^2 < 2$, denn wegen $\frac{1}{N} \leq 1$ gilt

$$\frac{2x+1}{N} < 2 - x^2 \Rightarrow \frac{1}{N}(2x + \frac{1}{N}) < 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + 2\frac{x}{N} + \frac{1}{N^2} < 2 \Rightarrow (x + \frac{1}{N})^2 < 2.$$

Aber dann wäre $x + \frac{1}{N} \in S_x \setminus S$ und wir erhalten einen Widerspruch zu $S = S_x$.

Definition. Wir setzen $\mathbb{R} := \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : S \text{ ist Dedekindscher Schnitt}\}$.

Als nächstes müssen wir Addition, Multiplikation und Ordnung auf $\mathbb{R}$ erklären.

Addition: Sind $S, \tilde{S}$ Schnitte, so setzen wir

$$S + \tilde{S} := \{x + y : x \in S, y \in \tilde{S}\}.$$

Wir rechnen nach, dass $S + \tilde{S}$ die Bedingungen **S1**,..., **S3** erfüllt.

S1: Es ist klar, dass $S + \tilde{S} \neq \emptyset$, da $S, \tilde{S} \neq \emptyset$. Ferner gilt: sind $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \notin S$, $b \notin \tilde{S}$, so gilt $a < x$ und $b < y$ für alle $x \in S, y \in \tilde{S}$. Hieraus folgt dann $a + b < x + y$ für alle $x \in S, y \in \tilde{S}$ und damit $a + b \notin S + \tilde{S}$. Es folgt $S + \tilde{S} \neq \mathbb{Q}$.

S2: Ist $x+y \in S+\tilde{S}$ und ist $z \in \mathbb{Q}$ mit $z \geq x+y$, so gilt $z-x \geq y$. Da $\tilde{S}$ die Bedimgung **S2** erfüllt, folgt $z-x \in \tilde{S}$. Aber dann folgt auch $z = x+(z-x) \in S+\tilde{S}$.

S3: Wäre $x_0 + y_0$ ein kleinstes Element in $S + \tilde{S}$, so wäre auch x_0 kleinstes Element in S, denn ist $x \in S$ beliebig, so folgt $x + y_0 \geq x_0 + y_0$ und damit $x \geq x_0$. Da S kein kleinstes Element besitzt, ist dies unmöglich!

Es ist klar, dass die oben definierte Addition kommutativ und assoziativ ist, da dies auch für die Addition auf $\mathbb{Q}$ gilt. Ist $S_0 = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, so rechnet man nach, dass
$$S_0 + S = S$$
für alle $S \in \mathbb{R}$ gilt. Damit ist S_0 neutrales Element für die Addition. Wir konstruieren nun das inverse Element $-S$ eines Schnittes S. Man beachte: die zunächst übliche Defintion $-S = \{-x : x \in S\}$ macht hier keinen Sinn, denn diese Menge ist kein Schnitt. Zur richtigen Konstruktion definieren wir zunächst
$$S_- := \{y \in \mathbb{Q} : y + x > 0 \text{ für alle } x \in S\}.$$
Man rechnet dann nach, dass S_- die Bedingungen **S1** und **S2** erfüllt. Aber S_- könnte ein kleinstes Element besitzen! Zum Beispiel prüft man leicht nach, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$
$$(S_x)_- = \{y \in \mathbb{Q} : y \geq -x\}$$
gilt. Wir setzen daher $-S := S_-$, falls S_- kein kleinstes Element besitzt und $-S := S_- \setminus \{x_0\}$, falls x_0 kleinstes Element von S_- ist. Dann rechnet man schnell nach, dass $-S \in \mathbb{R}$ mit $S + (-S) = S_0$ gilt. Damit ist $-S$ additives Inverses zu S! Im folgenden schreiben wir auch $0_\mathbb{R}$ für das Element S_0 und $1_\mathbb{R}$ für das Element $S_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1\}$.

Ordnung: Ist $S \in \mathbb{R}$, so sagen wir $S \geq 0_\mathbb{R}$, falls $x > 0$ für alle $x \in S$ gilt. Wir sagen $S > 0_\mathbb{R}$, falls $S \geq 0_\mathbb{R}$ und $S \neq 0_\mathbb{R}$. Dies ist äquivalent zur Aussage, dass ein $0 < a \in \mathbb{Q}$ existiert, mit $a < x$ für alle $x \in S$. Setzen wir dann $\mathbb{R}^+ = \{S \in \mathbb{R} : S > 0\}$, so folgt mit der obigen Definition für die Addition, dass
$$\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+ \cup -\mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^+ \cap -\mathbb{R}^+ = \emptyset.$$
und $S + \tilde{S} \in \mathbb{R}^+$ für alle $S, \tilde{S} \in \mathbb{R}^+$. Die nun folgende Definition der Multiplikation liefert dann auch sofort, dass $S \cdot \tilde{S} \in \mathbb{R}^+$ für alle $S, \tilde{S} \in \mathbb{R}^+$, womit dann alle Bedingungen an eine Anordnung auf $\mathbb{R}$ erfüllt sind!

Übung: Beweisen Sie die folgenden Tatsachen

(1) $S \geq \tilde{S} \Leftrightarrow \tilde{S} \subseteq S$,
(2) $S_x \geq S_y \Leftrightarrow x \geq y$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Multiplikation: Sind $S, \tilde{S} \in \mathbb{R}$ mit $S, \tilde{S} \geq 0_\mathbb{R}$, so setzen wir
$$S\tilde{S} := \{xy : x \in S, y \in \tilde{S}\}.$$

Wie im Fall der Addition rechnet man direkt nach, dass $S\tilde{S}$ wieder ein Dedekindscher Schnitt ist. Sind nun $S, \tilde{S}$ beliebige Elemente von $\mathbb{R}$, so definieren wir die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ durch

$$S \cdot \tilde{S} := \left\{ \begin{array}{cc} S\tilde{S} & \text{falls } S, \tilde{S} \geq 0_{\mathbb{R}} \\ (-S)(-\tilde{S}) & \text{falls } -S, -\tilde{S} \geq 0_{\mathbb{R}} \\ -\big(S(-\tilde{S})\big) & \text{falls } S, -\tilde{S} \geq 0_{\mathbb{R}} \\ -\big((-S)\tilde{S}\big) & \text{falls } -S, \tilde{S} \geq 0_{\mathbb{R}} \end{array} \right\}.$$

Mit etwas Geduld rechnet man dann nach, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tatsächlich ein angeordneter Körper ist. Hierbei ist $1_{\mathbb{R}} = S_1$ das neutrale Element für die Multiplikation. Das multiplikative Inverse eines Elementes $S > 0_{\mathbb{R}}$ wird wie folgt konstruiert: Setze

$$S^* := \{y \in \mathbb{Q} : xy > 1 \text{ für alle } x \in S\}.$$

Ähnlich wie im Fall der Kontruktion des additiven inversen Elements, erfüllt S^* die Bedingungen **S1** und **S2**, aber S^* kann unter Umständen ein kleinstes Element besitzen (z.B. gilt $(S_x)^* := \{y \in \mathbb{Q} : y \geq \frac{1}{x}\}$ für alle $0 < x \in \mathbb{Q}$). Daher definieren wir

$$S^{-1} := \left\{ \begin{array}{cc} S^* & \text{falls } S^* \text{ kein kleinstes Element besitzt} \\ S^* \setminus \{x_0\} & \text{falls } x_0 \in \mathbb{Q} \text{ kleinstes Element von } S^* \text{ ist} \end{array} \right\}.$$

Man rechnet dann nach, dass $S \cdot S^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$. Ist nun $S < 0_{\mathbb{R}}$, so setzen wir $S^{-1} := -(-S)^{-1}$ und erhalten ein multiplikatives Inverses für alle $S \neq 0_{\mathbb{R}}$. Die Verifikation der übrigen Körperaxiome überlassen wir dem Leser als Übung.

Vollständigkeit. Um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass jede nach unten beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum besitzt. Hieraus folgt dann durch Übergang auf $-M$ und den Rechenregeln für Infimum und Supremum, dass jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum besitzt. Wir zeigen dann, dass $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist. Nach Blatt 4, Aufgabe 2 folgt dann auch, dass jede Intervallschachtelung ein Inneres Element besitzt. Es ist dann gezeigt, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alle in der Vorlesung geforderten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ besitzt!

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und sei $C \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M. Das bedeutet, dass $S \subseteq C$ für alle $S \in M$ (wobei wir hier S und C als Teilmengen von $\mathbb{Q}$ betrachten). Wir setzen

$$I := \bigcup_{S \in M} S \subseteq C.$$

Man rechnet dann nach, dass I wieder ein Schnitt ist, also $I \in \mathbb{R}$. Wegen $S \subseteq I$ für alle $S \in M$, gilt $I \leq S$ für alle $S \in M$. Aus der Konstruktion folgt aber auch, dass $C \geq I$ für jede untere Schranke C von M gilt. Damit ist gezeigt, dass I eine größte untere Schranke von M ist.

Wir zeigen schließlich, dass $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist. Dafür müssen wir zeigen, dass zu jedem $R \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $R < N$, wobei wir ein $N \in \mathbb{N}$ (bzw, $x \in \mathbb{Q}$) mit dem Schnitt $S_N = \{x \in \mathbb{Q} : x > N\} \in \mathbb{R}$ (bzw. $S_x \in \mathbb{R}$) identifizieren. Wir können sicher annehmen, dass $R > 1$, da sonst $R \leq 1 < 2$ gelten würde. Dann gilt $\emptyset \neq M := \{n \in \mathbb{N} : n \leq R\}$. Da R obere Schranke von M ist, existiert $S := \sup(M) \leq R$. Da S die kleinste obere Schranke von M ist, existiert ein $n \in M$ mit $n > S - \frac{1}{2}$. Dann folgt $n + 1 > S + \frac{1}{2} > S$, also insbesondere $n + 1 \neq M$. Aber das bedeutet, dass $N := n + 1 > R$ gilt.

Wir haben nun die Konstruktion der reellen Zahlen erfolgreich durchgeführt! Wir wollen schließlich noch den folgenden Satz beweisen:

Satz. Ist $(K, +, \cdot)$ ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper, so ist K isomorph zu $\mathbb{R}$, d.h., es existiert eine bijektive Abbildung $\Phi : K \to \mathbb{R}$, so dass

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y), \quad \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \quad \text{und} \quad \Phi(x) \geq \Phi(y) \Leftrightarrow x \geq y$$

für alle $x, y \in K$ gilt.

Beweis: In der Vorlesung haben wir gesehen, dass sich die rationalen Zahlen kanonisch in den Körper K durch $\frac{n}{m} \mapsto \frac{n \cdot 1}{m \cdot 1}$ einbetten lassen. Wir fassen also nun $\mathbb{Q}$ auf diese Weise als Teilmenge von K auf. Für ein $a \in K$ setzen wir nun

$$S_a := \{x \in \mathbb{Q} : x > a\}.$$

Da K archimedisch angeordnet ist, folgt $S_a \neq \emptyset$, und aus den Körper- und Ordnungsaxiomen folgt dann leicht, dass $S_a \subseteq \mathbb{Q}$ ein Dedekindscher Schnitt ist. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$\Phi : K \to \mathbb{R}; \Phi(a) = S_a.$$

Man rechnet dann direkt nach, dass Φ Addition und Multilikation auf K in Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ überführt, und wegen $a \leq b \Leftrightarrow S_b \subseteq S_a \Leftrightarrow S_a \leq S_b$ erhält Φ auch die Ordnung.

Es bleibt zu zeigen, dass Φ bijektiv ist. Für die Injektivität genügt es zu zeigen, dass $a < b$ auch $S_a < S_b$ impliziert. Dies ist aber dann der Fall, wenn wir zeigen können, dass für alle $a, b \in K$ mit $a < b$ ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert mit $a < x < b$, denn dann ist $x \in S_a \setminus S_b$ und daher $S_a \neq S_b$. Die Existenz eines $x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$ wird aber in Blatt 3, (schriftliche) Aufgabe 2 gezeigt.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass Φ surjektiv ist. Sei dazu $S \subseteq \mathbb{Q}$ ein Schnitt. Da wegen **S2** jedes $x \in \mathbb{Q}$ mit $x \notin S$ eine untere Schranke von S ist, und da wegen $S \neq \mathbb{Q}$ ein solches x immer existiert, ist S nach unten beschränkt. In der Vorlesung wurde nun gezeigt, dass aus den vorausgesetzten Eigenschaften von K folgt, dass jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge von K ein Infimum besitzt. Ist daher $S \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Dedekindscher Schnitt, so ist $S \subseteq \mathbb{Q} \subseteq K$ eine nach unten beschränkte Teilmenge von K und besitzt daher ein Infimum $a := \inf(S)$ in K. Man prüft dann leicht nach, dass $S = S_a = \Phi(a)$ gilt. Damit ist Φ dann auch surjektiv, und der Beweis des Satzes ist vollendet. $\square$

Übung: Ergänzen Sie alle noch fehlenden Details des obigen Beweises!