

Das Trisentis-Spiel

Achim Clausing

Institut für Informatik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
e-mail: achim.clausing@uni-muenster.de

Zusammenfassung Das hier vorgestellte *Trisentis-Spiel* wurde, obwohl es eine sehr einfache und reizvolle Spielregel hat, offenbar bisher noch nicht untersucht. Bei diesem Spiel geht es darum, $n \times n$ quadratisch angeordnete Lämpchen einzuschalten. Jedes Lämpchen funktioniert zugleich als Schalter für seine (bis zu 8) Nachbarn. Das Spiel ist genau dann lösbar, wenn es eine 0-1-Matrix der Größe $n \times n$ gibt, bei der jedes Element zu einer ungeraden Anzahl von Einsen benachbart ist. Es wird gezeigt, dass es keine Lösung gibt, wenn n ungerade ist; für unendlich viele gerade n gibt es eine Lösung. Die Frage, ob das Spiel für gerades n immer lösbar ist, bleibt offen.

1 Spielregel

Das *Trisentis-Spiel* ist ein kleines Gerät mit 36 quadratisch angeordneten, von innen beleuchtbaren Druckschaltern auf der Oberseite. Zur Zeit existiert es nur in einem Exemplar.

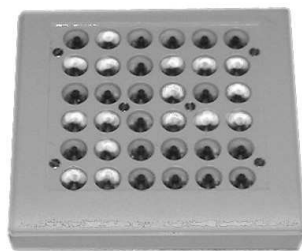


Abb. 1: Das Spielgerät

Wenn man einen der Schalter betätigt, werden die ihm benachbarten Lämpchen von Aus nach Ein bzw. von Ein nach Aus geschaltet. Das Lämpchen im Schalter selbst behält seinen Zustand bei. Benachbart sind auch diagonal angrenzende Schaltknöpfe. Die Abb. 1 zeigt das Gerät nach dem Drücken von drei Schaltern.

Zu Beginn sind sämtliche Lämpchen ausgeschaltet. Es geht darum, sie alle einzuschalten.

Das klingt nicht allzu schwierig, weil man für ein Lämpchen bis zu acht Möglichkeiten hat, von wo aus man es umschalten kann. Wenn man das Spiel ausprobiert, erzeugt man aber meistens schon mit wenigen Schaltklicks ein heilloses Durcheinander von beleuchteten und unbeleuchteten Schaltern, aus dem man durch weiteres Klicken nicht herausfindet: Weder schafft man es, alle Lampen einzuschalten, noch kommt man zum Ausgangszustand zurück.

Schlimmer noch: Wer nach längerem Probieren zufällig alle Lichter anbekommen hat, weiß meist nicht mehr, wie — der Erfolg ist unwiederholbar. Unter <http://cs.uni-muenster.de/trisentis/> kann man das Spiel ausprobieren. Wer die Lösung gefunden hat, kann sich an der Erzeugung schwierigerer Muster versuchen — Schachbrett, Beleuchtung einer Hälfte, Spiralen etc.

Trisentis kann man natürlich auch auf Spielfeldern von anderer Größe als 6×6 spielen, $n = 6$ hat aber den Vorteil, dass es einen Algorithmus gibt, der es erlaubt, von jeder Konfiguration des Spielfelds ausgehend einen beliebigen neuen Zustand zu erreichen, ohne lange Rechnungen anzustellen. Für andere Spielfeldgrößen ist das Spiel entweder zu einfach ($n = 4$), oder zu schwierig, um es ohne Computerhilfe zu spielen ($n = 8, 10, \dots$), oder aber das Spielziel, alle Schalter zu beleuchten, ist unerreichbar (n ungerade).

Der Lösungsalgorithmus für $n = 6$ ist nicht ganz trivial, aber man kann ihn in endlicher Zeit selbst herausfinden; er soll hier deshalb nicht dargestellt werden. In dieser Arbeit wird die Lösbarkeit von Trisentis auf einem $n \times n$ -Spielfeld in Abhängigkeit von n untersucht.

2 Orbix etc.

Die Idee für das Trisentis-Spiel entstand während eines Skiurlaubs im schweizerischen Disentis (der Name hat damit zu tun). Eine Internet-Recherche hat aber schnell gezeigt, dass sie nicht ganz neu ist.

In amerikanischen Spielzeugläden gab es um 1995 ein Spiel namens Orbix zu kaufen, das nach demselben Prinzip funktioniert wie Trisentis: Auf einer kleinen Plastikugel sind zwölf beleuchtbare Schalter so angeordnet, dass jeder zu fünf anderen benachbart ist und bei diesen die Beleuchtung an- bzw. ausschaltet.

Diese ikosaedrische Anordnung ist allerdings wenig glücklich gewählt. Man kann nämlich dadurch, dass man die fünf Nachbarschalter eines Schalters drückt, genau bei diesem das Lämpchen umschalten. Sobald man das begriffen hat, ist das Spiel langweilig, man kann ohne Probleme jedes Beleuchtungsmuster herstellen.

Ein anderes, 1997 unter dem Namen Lights Out erschienenenes Spiel funktioniert ebenfalls ähnlich. Hier sind die Knöpfe in einem 5×5 -Quadrat angeordnet, jeder schaltet sein eigenes Lämpchen sowie die seiner (bis zu) vier direkten Nachbarn hin und her. Startzustand ist ein Zufallsmuster, Ziel ist es, alle Lichter zu löschen. Lights Out ist um einiges einfacher zu spielen als Trisentis, es gibt aber wenigstens keine Trivialstrategie wie bei Orbix.

Die Herstellerfirma hält sogar ein Patent auf Lights Out. Tatsächlich existieren aber eine Reihe von teilweise lange vor 1997 veröffentlichten Arbeiten von K. Sutner, in denen genau dieses Spiel, von Sutner σ -Spiel genannt, für $n \times m$ -Spielfelder untersucht wird [12], [13], [14], [15]. Das σ -Spiel geht wiederum auf ein Spiel zurück, das in den achtziger Jahren unter dem Namen Merlin erhältlich war [8], [11]. Aus derselben Zeit stammt auch das ebenfalls verwandte Quatrainment-Spiel [9], [6]. In [6] wiederum findet man einen Hinweis auf ein noch früheres Spiel namens Think-A-Dot [4]. Es wäre keine besondere Überraschung, wenn sich herausstellen sollte, dass auch Think-A-Dot nicht das erste Spiel dieser Art war.

3 Linearität

Für die mathematische Beschreibung der Klasse dieser Spiele ist die Annahme eines rechteckigen Spielfelds unnötig. Man betrachtet N Schalter $S_1 \dots S_N$, von denen jeder die Lämpchen in einigen der anderen Schalter aus- und einschaltet (möglicherweise auch das eigene). Das umfasst alle oben genannten Varianten des Spiels. Für Trisentis auf einem $n \times n$ -Feld gilt $N = n^2$.

Wie man leicht einsieht, hängt der Beleuchtungszustand eines solchen Geräts nicht von der Reihenfolge der Eingaben ab: Ein Lämpchen ist genau dann an, wenn die Anzahl der Klicks auf die Nachbarn, von denen her es geschaltet werden kann, ungerade war, sonst ist es aus. Für keine Beleuchtungskonfiguration ist mehr als ein Klick je Schalter erforderlich.

Die Eingabe bei S_i sei $x_i = 0$ bzw. $x_i = 1$, je nachdem, ob S_i gerade oder ungerade oft gedrückt wurde. Der Zustand von S_i sei $y_i = 0$ (Aus) bzw. $y_i = 1$ (An). Außerdem sei

$$T_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } S_i \text{ das Lämpchen von } S_j \text{ schaltet} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann offenbar

$$y_j = \sum_{i=1}^N x_i T_{ij} \quad (j = 1 \dots N) \quad (1)$$

Die Summe bezieht sich auf den Körper $\mathbb{F}_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$, und man sieht, dass die Matrix $(T_{i,j})$ die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis zu der linearen Abbildung

$$\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

im \mathbb{F}_2 -Vektorraum $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^N$ der Konfigurationen ist, welche durch (1) definiert ist.

Drücken der Schalter $S_{i_1} \dots S_{i_k}$ entspricht der Eingabe $x = (x_1 \dots x_N)$ mit $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in \{i_1 \dots i_k\}$. Man erzeugt dadurch, ausgehend von einer Konfiguration $a \in \mathcal{C}$ die Konfiguration $a + \mathcal{T}(x)$. Das Spiel ist lösbar, wenn die Eins $e = (1 \dots 1) \in \mathcal{C}$ im Bild von \mathcal{T} liegt.

Die Matrix $T = (T_{ij})$ kann man auch als die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen ansehen, an dessen Knoten die Schalter und Lämpchen sitzen und dessen Kanten angeben, welche Lämpchen ein Schalter kontrolliert. Offensichtlich gibt es zu jeder Matrix $T \in \mathbb{F}_2^{N \times N}$ ein derartiges Spiel.

Erstaunlich ist, dass man trotz der Allgemeinheit dieser Situation überhaupt etwas über die Lösbarkeit sagen kann:

Satz 1 ([13], Theorem 3.2)

Wenn T symmetrisch ist, dann liegt der Diagonalvektor $t = (T_{1,1} \dots T_{N,N})$ im Bild der Abbildung \mathcal{T} . □

Der Satz wurde mehrfach bewiesen (vgl. [7], [1], [5]). Er besagt insbesondere, dass immer dann, wenn jeder Schalter sich auch selbst kontrolliert (wie etwa bei Lights Out), alle Lichter einschaltbar sind. Für das Trisentis-Spiel hilft er jedoch nicht weiter, weil dort t der Nullvektor ist.

Andererseits ist die folgende einfache Beobachtung sehr hilfreich. Wir benutzen die Notation $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ für $x, y \in \mathcal{C}$.

Lemma 1 Wenn T symmetrisch und $e \in \text{Bild}(\mathcal{T})$ ist, dann hat jeder Vektor aus dem Kern von \mathcal{T} eine gerade Anzahl von Einsen.

BEWEIS. Aus $e = \mathcal{T}(y)$ für ein $y \in \mathcal{C}$ folgt für alle $x \in \text{Kern}(\mathcal{T})$: $\langle x, e \rangle = \langle x, \mathcal{T}(y) \rangle = \langle \mathcal{T}(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$ wegen der Symmetrie von T . Offenbar ist $\langle x, e \rangle$ aber gerade die Anzahl von Einsen in x modulo 2 (seine *Parität*). □

Für das Trisentis-Spiel auf einem $n \times m$ -Gitter sei die zugehörige lineare Abbildung mit $\mathcal{T}_{n \times m}$ bezeichnet, ferner seien $\mathcal{C}_{n \times m} = \mathbb{F}_2^{n \times m}$ die Menge der $n \times m$ -Matrizen über \mathbb{F}_2 , $\mathcal{K}_{n \times m} = \text{Kern}(\mathcal{T}_{n \times m})$ und $\mathcal{B}_{n \times m} = \text{Bild}(\mathcal{T}_{n \times m})$. Schließlich sei noch $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n \times n}$; analog sind \mathcal{T}_n , \mathcal{K}_n und \mathcal{B}_n erklärt.

4 Trisentis für ungerades n

Für nicht zu großes n kann man versuchen, die Gleichung $\mathcal{T}_n(X) = e$ explizit zu lösen. Die Anzahl der Unbekannten ist zwar $N = n^2$, entsprechend groß ist Matrix $(T_{ij})_{i,j=1 \dots n^2}$. Man kann das aber auf n Unbekannte reduzieren und für nicht zu großes n durchrechnen. Die Zurückführung auf nur n Unbekannte ist nicht schwierig, soll aber hier nicht verraten werden. Wer sie findet, hat damit auch einen Algorithmus zur Verfügung, mit dem man alle Lämpchen eines Trisentis-Spielfelds mit Ausnahme derer in der letzten Zeile einschalten kann — in den Fällen, in denen dies möglich ist.

Für $n \leq 150$ hat die Rechnung ergeben, dass genau dann eine Lösung existiert, wenn n gerade ist.

Wäre das Trisentis-Spielfeld auf einem Torus angeordnet (die Randfelder hätten jeweils auch den gegenüberliegenden Rand als Nachbarn), dann wäre die Unlösbarkeit für ungerades n offensichtlich: Ein Schaltklick ändert

dann jeweils den Zustand einer geraden Anzahl Lämpchen, also wären nur gerade Spielpositionen erreichbar. Schwierig wird es erst, weil bei Trisentis die Schalter am Rand ungerade viele Lämpchen schalten.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es für kein ungerades n eine Lösung gibt. Dazu genügt es nach Lemma 1, jeweils ein Kernelement mit ungerader Parität zu angeben.

Für $n = 4k + 1$ ist das einfach. Die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

liegt offensichtlich in \mathcal{K}_n (jedes Element hat 0, 2 oder 4 Einsen als Nachbar), und sie hat mit $(2k + 1)^2$ Einsen ungerade Parität.

Die obige Matrix enthält den einfachsten Fall einer *Kachelung*: Für eine $n \times n$ -Matrix X kann man aus k^2 Kopien von X , die man so, wie in Abb. 2 dargestellt, horizontal und vertikal gespiegelt anordnet, eine $m \times m$ -Matrix $K(X, k)$ mit $m = k(n + 1) - 1$ konstruieren.

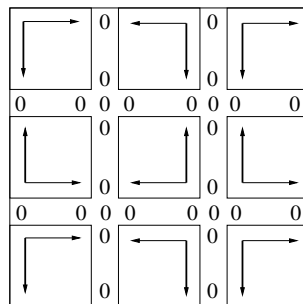


Abb. 2: Kachelung: $K(X, 3)$

Wenn $X \in \mathcal{K}_n$ gilt, also jeder Eintrag in X zu einer geraden Anzahl Einsen benachbart ist, dann gilt offenbar dasselbe für $K(X, k)$, d. h. $K(X, k)$ liegt in \mathcal{K}_m . Hat X zusätzlich ungerade Parität und ist k ungerade, so hat auch $K(X, k)$ ungerade Parität.

Daraus sieht man, dass es genügt, Matrizen $X_n \in \mathcal{K}_n$ ungerader Parität für alle $n = 2^l - 1$ zu finden. Ein beliebiges ungerades m schreibt man als $m = k \cdot 2^l - 1$ mit ungeradem k , die Matrix $K(X_n, k)$ liegt dann in \mathcal{K}_m und hat wiederum ungerade Parität.

Lemma 2 Zu jedem $m = 2^n - 1$, $n \geq 1$, gibt es Matrizen $X_n \in \mathcal{K}_m$, die eine ungerade Anzahl von Einsen haben.

BEWEIS. Die Matrizen X_n werden mit Hilfe zweier Operatoren P und Q konstruiert, $P : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{2n+1}$, $Q : \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{2n+1}$, deren Definition man sich anhand von Abb. 3 veranschaulichen kann.

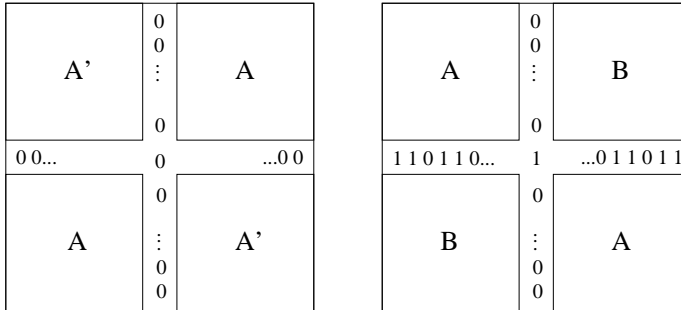


Abb. 3: Die Operatoren $P(A)$ und $Q(A, B)$

Es sei $A' \in \mathcal{C}_n$ die Matrix, die aus $A \in \mathcal{C}_n$ durch Spiegeln an einer senkrechten Geraden entsteht. Die Matrix $P(A) \in \mathcal{C}_{2n+1}$ enthält im linken oberen und im rechten unteren Viertel jeweils eine Kopie von A' , die beiden anderen Viertel enthalten A , die mittlere Zeile und Spalte sind Nullvektoren. Für zentralsymmetrisches A ist auch $P(A)$ wieder zentralsymmetrisch, in diesem Fall ist $P(A) = K(A', 2)$.

Für $A, B \in \mathcal{C}_n$ entsteht $Q(A, B) \in \mathcal{C}_{2n+1}$ auf ähnliche Weise: Das linke obere und das rechte untere Viertel enthalten A , die beiden anderen Viertel jeweils B . Die mittlere Zeile ist $110110 \dots 1 \dots 011011$, die mittlere Spalte $0 \dots 010 \dots 0$.

Damit definieren wir Matrizen $X_n, Y_n \in \mathcal{C}_{2^n - 1}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= (1), Y_1 = (0), \\ X_{n+1} &= Q(X_n, Y_n), Y_{n+1} = P(X_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{2}$$

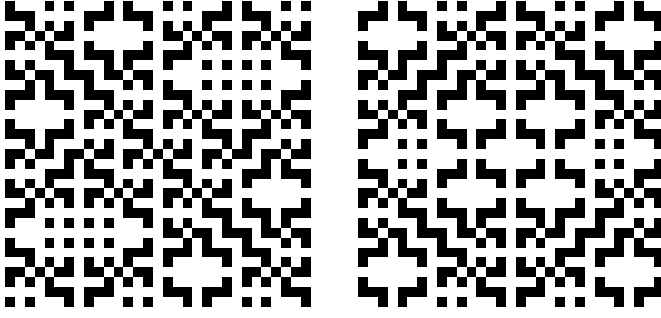
Äquivalent dazu ist

$$X_1 = 1, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_{n+2} = Q(X_{n+1}, P(X_n)).$$

In Abb. 4 kann man anhand der Definition nicht nur X_5 , sondern auch X_1 bis X_4 erkennen. (Schwarz steht für 1, weiß für 0.)

Weil in $P(A)$ und in $Q(A, B)$ jede der beteiligten Matrizen doppelt vorkommt und die Zeile $110110 \dots 1 \dots 011011$ ungerade Parität hat, ist klar, dass die X_n ungerade und die Y_n gerade Parität haben.

Um zu zeigen, dass sie im Kern liegen, betrachten wir zu $X \in \mathcal{C}_n$ die Matrix $[X] \in \mathcal{C}_{n+2}$, die entsteht, wenn X ringsum mit einer Nullzeile bzw. -spalte umgeben wird, und definieren als (\mathcal{T}_n^-) Resultante von X die Matrix $\mathcal{R}(X) = \mathcal{T}_n([X])$. Offensichtlich liegt X genau dann in \mathcal{K}_n , wenn $\mathcal{R}(X)$ außer in

Abb. 4: Die Matrizen X_5 und Y_5 aus \mathcal{K}_{31}

den Randzeilen und -spalten nur Nullen enthält. Induktiv zeigen wir, dass $\mathcal{R}(X_n)$ folgende Gestalt hat: Die ersten beiden Zeilen sind

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1^{(110)^*0} \\ 0^*1 \end{pmatrix} \quad \text{für gerades } n \text{ und} \\ & \begin{pmatrix} 1^{(110)^*11} \\ 0^*1 \end{pmatrix} \quad \text{für ungerades } n, n > 1. \end{aligned}$$

Dabei ist m^* als null-, ein- oder mehrmalige Wiederholung des Tupels m zu lesen. Wie oft das Tupel wiederholt wird, kann man leicht aus der von n abhängenden Größe der Matrix ermitteln: Für gerades n beträgt sie $a_n = (2^n - 1)/3$, für ungerades $b_n = (2^n - 2)/3$. Im Beweis spielt die genaue Anzahl aber keine Rolle.

Die letzten beiden Zeilen von $\mathcal{R}(X_n)$ ergeben sich aus der Zentralsymmetrie von X_n , alle übrigen Einträge sind Null.

Für $\mathcal{R}(Y_n)$ zeigen wir: Die ersten zwei Zeilen sind

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (110)^*11 \\ 10^*1 \end{pmatrix} \quad \text{für gerades } n \text{ und} \\ & \begin{pmatrix} 00(110)^*0 \\ 10^*1 \end{pmatrix} \quad \text{für ungerades } n, n > 1. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Zeilen von $\mathcal{R}(Y_n)$ sind wieder durch die Zentralsymmetrie von $\mathcal{R}(Y_n)$ bestimmt, der Rest besteht aus Nullen.

Den Induktionsanfang rechnet man unmittelbar nach:

Für $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ findet man

$$\mathcal{R}(X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{R}(Y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist die Behauptung richtig.

Die erste Zeile von $\mathcal{R}(X_{n+1}) = \mathcal{R}(Q(X_n, Y_n))$ entsteht durch Konkatination der ersten Zeilen von $\mathcal{R}(X_n)$ und $\mathcal{R}(Y_n)$ mit einer Stelle Überschneidung (der letzte Eintrag von $\mathcal{R}(X_n)$ muss zum ersten von $\mathcal{R}(Y_n)$ addiert werden).

Die zweite Zeile von $\mathcal{R}(X_{n+1})$ erhält man analog. Für gerades n ergibt das nach Induktionsvoraussetzung die Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1(110)^*(0+1)10(110)^*11 \\ 0^*(1+1)0^*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(110)^*11 \\ 0^*1 \end{pmatrix},$$

also die Induktionsbehauptung für ungerades $n + 1$.

Ist n ungerade, so ergibt sich für die ersten beiden Zeilen von $\mathcal{R}(X_{n+1})$

$$\begin{pmatrix} 1(110)^*1(1+0)0(110)^*0 \\ 0^*(1+1)0^*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(110)^*0 \\ 0^*1 \end{pmatrix},$$

entsprechend der Behauptung.

Für $\mathcal{R}(Y_{n+1})$ ergibt sich wegen $Y_{n+1} = P(X_n)$ bei geradem n als oberer Rand

$$\begin{pmatrix} 0(011)^*(1+1)(110)^*0 \\ 10^*(0+0)0^*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(011)^*0(110)^*0 \\ 10^*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00(110)^*0 \\ 10^*1 \end{pmatrix},$$

und bei ungeradem n

$$\begin{pmatrix} 11(011)^*(1+1)(110)^*11 \\ 10^*(0+0)0^*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (110)^*11 \\ 10^*1 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{R}(X_{n+1})$ und $\mathcal{R}(Y_{n+1})$ zwischen den ersten und letzten zwei Zeilen nur Nullen enthalten. Für $\mathcal{R}(Y_{n+1})$ folgt das direkt aus der Darstellung von $Y_{n+1} = K(X'_n, 2)$ als gekachelte Matrix.

Bei $\mathcal{R}(X_{n+1})$ ist die Überlegung nicht ganz so einfach, hier kommt die mittlere Zeile $110 \dots 1 \dots 011$ ins Spiel. Wir zerlegen X_{n+1} in drei Summanden:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} X_n & \mathbf{0} & Y_n \\ 0 \dots 0 & \dots 0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 \dots 0 & \dots 0 & \\ Y_n & \mathbf{0} & X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 110 \dots 1 & \dots 011 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Der erste Summand (die obere Halbmatrix) heiße H_n , dann ist der zweite die zentralsymmetrisch gespiegelte Matrix H_n^\times , der dritte Summand heiße M_n . Zu zeigen ist, dass die Summe der mittleren drei Zeilen, also der Zeilen $n + 1$ bis $n + 3$ von $\mathcal{R}(H_n)$, $\mathcal{R}(H_n^\times)$ und $\mathcal{R}(M_n)$, Null ist.

Zeile $n + 1$ von $\mathcal{R}(H_n)$ erhält man wegen der Symmetrie von $\mathcal{R}(X_n)$ und $\mathcal{R}(Y_n)$ aus deren zweiten Zeilen, gelesen von rechts nach links und mit einer Stelle Überschneidung in der Mitte, zu $10^*(0+1)0^*1 = 10^*\underline{1}0^*1$. (Die unterstrichene Position gibt die Mitte des Vektors an.) Aus Symmetriegründen ist das auch Zeile $n + 3$ von $\mathcal{R}(H_n^\times)$.

Zeile $n + 2$ von $\mathcal{R}(H_n^\times)$ erhält man aus den ersten Zeilen von $\mathcal{R}(Y_n)$ und $\mathcal{R}(X_n)$: Für gerades n steht hier $z_{n+2} = (110)^*1(1+1)(110)^*0 = (110)^*1\underline{0}(110)^*0$. Für ungerades n ist $z_{n+2} = 00(110)^*(0+1)(110)^*11 = 00(110)^*\underline{1}(110)^*11$.

Für Zeile $n + 2$ von $\mathcal{R}(H_n) + \mathcal{R}(H_n^\times)$ ist aus Symmetriegründen der inverse Vektor von z_{n+2} zu z_{n+2} zu addieren. Das ergibt für gerades n die Zeile $1(110)^*\underline{0}(011)^*1$ und für ungerades n die Zeile $1(110)^*1\underline{0}1(011)^*1$, wie man leicht nachrechnet.

In beiden Fällen ist die Zeile also von der Form $1110110 \dots \underline{0} \dots 0110111$. Die mittleren drei Zeilen von $\mathcal{R}(H_n) + \mathcal{R}(H_n^\times)$ sind somit von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass die mittleren drei Zeilen von $\mathcal{R}(M_n)$ genauso aussehen. Daraus folgt, dass die mittleren drei Zeilen von $\mathcal{R}(X_{n+1})$ Null sind. \square

Die Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts hatten gezeigt, dass mit Lemma 2 auch der folgende Satz bewiesen ist.

Satz 2

Für alle ungeraden n liegt e nicht im Bild der Abbildung \mathcal{T}_n . Das Trisentis-Spiel ist für ungerade n nicht lösbar. \square

Die in Lemma 2 konstruierten Matrizen $X_n \in \mathcal{K}_m$, $m = 2^n - 1$, mit ungerader Parität sind keineswegs die einzigen ihrer Art. Die Hälfte aller Kernelemente ist von ungerader Parität, wenn es ein solches Kernelement gibt. Konkrete Beispiele sind unter anderem die Matrizen $Z_n = Q(\mathbf{0}, X_{n-1})$ (Abb. 5).

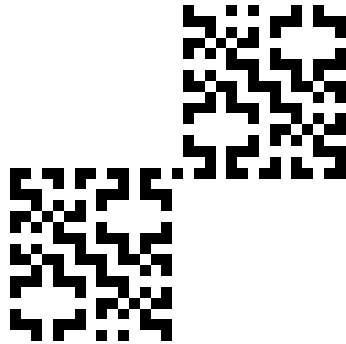


Abb. 5: $Z_5 \in \mathcal{K}_{31}$ mit ungerader Parität

5 Trisentis für gerades n

Es war schon zu Anfang des vorigen Abschnitts gesagt worden, dass die Gleichung $\mathcal{T}_n(X) = e$ für alle geraden $n \leq 150$ eine Lösung besitzt. In vielen Fällen liegt das daran, dass der Kern \mathcal{K}_n trivial ist. Dann (und nur dann) ist das Spiel aus jeder Startposition heraus lösbar. Aber auch, wenn der Kern von Null verschieden ist, kann das Spiel lösbar sein, wie bereits das Beispiel $n = 4$ mit der Kerndimension $d_n = 4$ zeigt. Die nachstehende Tabelle gibt die Dimensionen d_n aller geraden $n \leq 100$ mit $d_n > 0$ an.

n	4	14	16	24	34	44	50	54	62	64	74	84	94
d_n	4	12	16	4	4	12	16	4	60	64	12	20	4

Tabelle 1: Kerndimensionen $d_n > 0$

Einiges in dieser Tabelle kann man relativ leicht erklären. Die Tatsache, dass $d_n > 0$ für alle $n = 10k + 4$ gilt, hat zum Beispiel ihren Grund in der schon mehrfach benutzten Kachelung: Mit $X \in \mathcal{K}_n$ ist, wie man ganz einfach sieht, $K(X, m) \in \mathcal{K}_{nm+m-1}$. Mit $n = 4$ und $m = 2l + 1$ folgt daraus, dass \mathcal{K}_4 in jeden der Kerne \mathcal{K}_{10l+4} ($l = 1, 2, \dots$) durch Kachelung eingebettet ist. Ebenso ist \mathcal{K}_{14} in \mathcal{K}_{30l+14} ($l = 1, 2, \dots$) eingebettet, was das Wiederauftreten von 12 bei $n = 44$ und $n = 74$ erklärt.

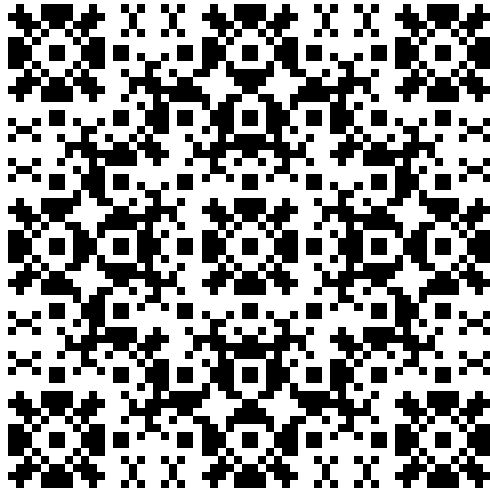


Abb. 6: Die (eindeutige) Lösung von $\mathcal{T}_{60}(X) = e$

Lösungen von $\mathcal{T}_n(X) = e$ konstruieren, hat sich als erheblich schwierigeres Unterfangen herausgestellt, als es die Konstruktion von Kernelementen ist. Besonders in den Fällen der Dimension $d_n = 0$ findet man zwar immer wieder Hinweise darauf, dass die Lösungen aus solchen für kleinere n zumindest teilweise zusammengesetzt sind. Aber alle meine Versuche, dahinter eine Regelmäßigkeit zu erkennen, sind bisher gescheitert.

Abb. 6 verdeutlicht das Problem: In der Lösung für $n = 60$ finden sich fünf Exemplare der Lösung für $n = 12$ (jedes davon ist durch Nullen eingerahmt). Bei genauerem Hinsehen findet man auch 49 Exemplare der Lösung von $n = 2$ und weitere Versatzstücke aus Lösungen von $\mathcal{T}_{n \times m}(X) = e$ mit $n \neq m$. Dieses Verhalten ist keine Besonderheit von $n = 60$, es findet sich in ähnlicher Form immer wieder. Für die Zusammensetzung der (eindeutig bestimmten) Gesamtlösung aus diesen Teilen fehlt mir aber jeder Hinweis.

Man kann jedoch immerhin zeigen, dass es unendlich viele gerade n gibt, für die Trisentis lösbar ist. In gewisser Weise ist der Beweis sogar einfacher als die Konstruktion der Obstruktionsmatrizen X_n im ungeraden Fall, weil man auf die Nullzeile zwischen den Bauteilen der Lösungen verzichten und sie direkt „zusammenstecken“ kann wie kleine Legosteine. Allerdings ist die verwendete Rekursion komplizierter als (2).

Die Menge der Lösungen von $\mathcal{T}_{n \times m}(X) = e$ sei durch $\mathcal{L}_{n \times m}$ bezeichnet, sie ist ein affiner Unterraum von $\mathcal{C}_{n \times m}$ oder leer. Zu $X \in \mathcal{C}_{n \times m}$ mit $n, m \geq 3$ sei $[X]$ die Matrix, die durch Weglassen der vier äußeren Zeilen und Spalten entsteht. Für $n, m \geq 0$ bezeichnen wir als *partielle Lösung* jede Matrix $X \in \mathcal{C}_{n \times m}$ mit $[\mathcal{T}_{n \times m}(X)] = e$. Die Bausteine der Konstruktion werden solche partiellen Lösungen sein.

Die Menge aller partiellen Lösungen heiße $\mathcal{P}_{n \times m}$, analog zu \mathcal{C}_n schreiben wir \mathcal{L}_n für $\mathcal{L}_{n \times n}$ und \mathcal{P}_n für $\mathcal{P}_{n \times n}$. Man kann leicht zeigen, dass für alle $n, m \geq 3$ partielle Lösungen existieren.

Wenn man aus $X \in \mathcal{P}_{n \times l}$, $Y \in \mathcal{P}_{n \times m}$ durch Nebeneinanderschreiben wieder eine partielle Lösung $Z = (XY) \in \mathcal{P}_{n \times (l+m)}$ erhält, dann sagen wir, dass X und Y *horizontal zueinander passen*. Partielle Lösungen X, Y mit gleicher Spaltenzahl *passen vertikal zueinander*, wenn $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ wieder eine partielle Lösung ist.

Lemma 3 $X \in \mathcal{P}_{n \times l}$, $Y \in \mathcal{P}_{n \times m}$ *passen genau dann horizontal zueinander, wenn die die Summe aus den letzten zwei Spalten von $\mathcal{T}_{n \times (l+1)}((X, \mathbf{0}))$ und den ersten zwei Spalten von $\mathcal{T}_{n \times (m+1)}((\mathbf{0}, Y))$ höchstens in der ersten und letzten Zeile Nullen enthält.*

BEWEIS. Die Bedingung ist bei näherem Hinsehen (vgl. Abb.7) offensichtlich nur eine Umformulierung der Aussage, dass das Bild von $Z = (XY)$ unter $\mathcal{T}_{n \times (l+m)}$ höchstens am Rand Nullen enthält. Das wiederum ist gleichbedeutend mit $Z \in \mathcal{P}_{n \times (l+m)}$. □

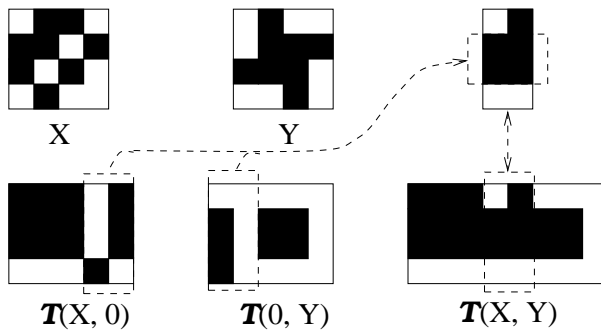


Abb. 7: Zusammenpassen zweier partieller Lösungen

Man kann also an den Resultierenden von partiellen Lösungen mit etwas Übung ablesen, ob man daraus eine größere partielle Lösung zusammensetzen kann. Umgekehrt kann man natürlich jede Partiaallösung an einer beliebigen Zeile oder Spalte in zwei zueinander passende Partiaallösungen zerlegen.

Satz 3

Das Trisentis-Spiel ist für unendlich viele m lösbar. Genauer: Zu jedem $m = 2 \cdot 4^n$, $n \geq 1$, gibt es Matrizen $S_n \in \mathcal{L}_m$ und $\tilde{S}_n \in \mathcal{L}_{m-2}$.

BEWEIS. Bei der Konstruktion werden alle möglichen Umordnungen $A^R, A^L, A^X, A^|, A^-, A^\setminus, A^/$ einer Matrix A benutzt; die Bedeutung der Symbole geht aus Abb. 8 hervor. Der fett gezeichnete Pfeil gibt jeweils die Anordnung der Spalten der Ausgangsmatrix in der umgeordneten Matrix an, der dünne Pfeil die Anordnung der Zeilen.

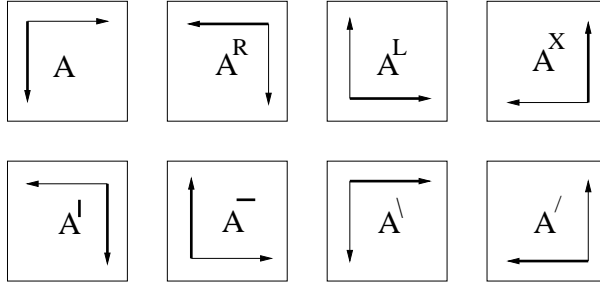


Abb. 8: Die acht Umordnungen von $A \in \mathcal{C}_n$

Alle Lösungsmatrizen werden aus Kopien der folgenden vier partiellen Lösungen zusammengesetzt:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 C_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & D_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Davon ausgehend definieren wir Folgen von Matrizen $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathcal{C}_{4^n}$ sowie $E_n, F_n, G_n, H_n \in \mathcal{C}_{2 \cdot 4^n}$ in folgender Weise:

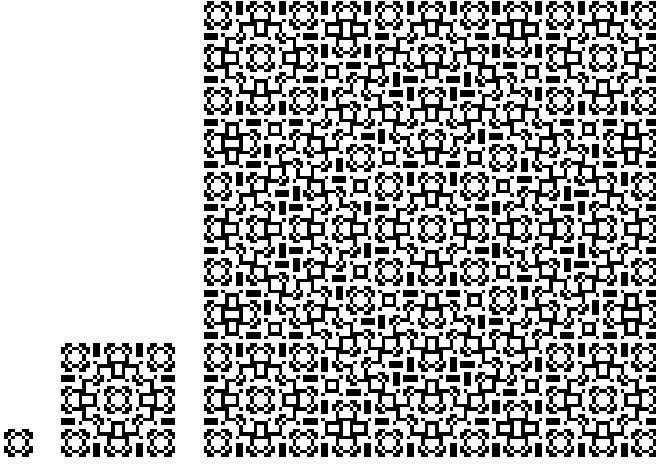
Für $n = 1, 2, \dots$ sei

$$\begin{aligned}
 E_n &= \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} & F_n &= \begin{pmatrix} B_n^\times & C_n^- \\ C_n^| & B_n \end{pmatrix} \\
 G_n &= \begin{pmatrix} B_n & B_n^| \\ B_n^- & B_n^\times \end{pmatrix} & H_n &= \begin{pmatrix} C_n & C_n^| \\ C_n^- & C_n^\times \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= \begin{pmatrix} E_n & E_n^| \\ E_n^- & E_n^\times \end{pmatrix} & B_{n+1} &= \begin{pmatrix} G_n & E_n \\ E_n^\setminus & F_n \end{pmatrix} \\
 C_{n+1} &= \begin{pmatrix} H_n & E_n^\setminus \\ E_n & F_n^| \end{pmatrix} & D_{n+1} &= \begin{pmatrix} E_n^\times & E_n^L \\ E_n^R & E_n \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Die gesuchten Lösungen sind dann durch $S_n = G_n$ und $\tilde{S}_n = \lfloor H_n \rfloor$ gegeben.

Abb. 9: Die Lösungen S_1 , S_2 und S_3

Zum Beweis dieser Aussage werden wir mit Lemma 3 zeigen, dass die Matrizen an allen horizontalen und vertikalen „Nahtstellen“ dieser Definition zueinander passen. Dazu müssen wir für jede Matrix M_n , die an der Rekursion beteiligt ist ($M_n = A_n \dots H_n$), über die äußersten beiden Zeilen bzw. Spalten (oben, unten, links und rechts) von $\mathcal{R}(M_n)$ Buch führen. Bei acht beteiligten Matrizen mit je zwei Zeilen an je vier Seiten ist das etwas aufwendig. Glücklicherweise haben alle Matrizen mit Ausnahme von E_n mindestens eine Symmetrie, sodass sich die Zahl ihrer wesentlich verschiedenen Ränder mindestens halbiert.

		\rightarrow	\Rightarrow	$\overset{l}{\rightarrow}$	$\overset{u}{\rightarrow}$
$\mathcal{R}(A_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \rightarrow \downarrow \\ \Rightarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 001^*00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0^* \\ 1(0110)^*1 \end{pmatrix}$	—	—
$\mathcal{R}(B_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \rightarrow \downarrow \\ \Rightarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 1^*01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0(1110)^*0 \\ 1(0001)^*0 \end{pmatrix}$	—	—
$\mathcal{R}(C_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \rightarrow \downarrow \\ \Rightarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0^* \\ 01(1100)^* \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0(0111)^*0 \\ 000(0010)^*011 \end{pmatrix}$	—	—
$\mathcal{R}(D_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \rightarrow \downarrow \\ \leftarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0(1110)^*0 \\ 000(0100)^*001 \end{pmatrix}$	—	—	—
$\mathcal{R}(E_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ i \downarrow \underline{u} \downarrow \\ \Rightarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 001^*01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0(1110)^*0 \\ (1000)^*01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0^* \\ 1(0110)^*0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0(0111)^*0 \\ 000(0010)^*000 \end{pmatrix}$
$\mathcal{R}(F_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \rightarrow \uparrow \\ \leftarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0(0111)^*0 \\ (0100)^*11 \end{pmatrix}$	—	—	—
$\mathcal{R}(G_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \rightarrow \uparrow \\ \leftarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 1^* \end{pmatrix}$	—	—	—
$\mathcal{R}(H_n)$	$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \rightarrow \uparrow \\ \leftarrow \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0^* \\ 011(1001)^*110 \end{pmatrix}$	—	—	—

Tabelle 2: Die Ränder der Matrizen $\mathcal{R}(A_n) \dots \mathcal{R}(H_n)$

Tabelle 2 dient dieser Buchhaltung. Sie gibt für jede Matrix M_n in der mit „→“ überschriebenen Spalte die ersten zwei Zeilen von $\mathcal{R}(M_n)$ in der Form eines 0-1-Musters an, wie sie schon im vorigen Abschnitt benutzt wurde.

Je nach der (in der zweiten Spalte symbolisch dargestellten) Symmetrie von M_n kennt man mit diesen Zeilen weitere Ränder¹ von $\mathcal{R}(M_n)$. So stimmen beispielsweise die letzte und vorletzte Spalte von $\mathcal{R}(F_n)$, $\mathcal{R}(G_n)$ und $\mathcal{R}(H_n)$, von unten nach oben gelesen, mit der jeweiligen ersten bzw. zweiten Zeile der Matrix überein. In den Fällen, in denen die beiden letzten Spalten von $\mathcal{R}(M_n)$ anders aufgebaut sind, als die ersten zwei Zeilen, findet man sie in der Tabelle unter „⇒“ beschrieben.

Die mit „ \xrightarrow{l} “ und „ \xrightarrow{u} “ markierten Tabellenspalten sind nur für $\mathcal{R}(E_n)$ nötig und geben den linken bzw. unteren Rand dieser Matrix an.

Zu beachten ist, dass bei jedem Tabelleneintrag das obere Muster die außen liegende Zeile bzw. Spalte angibt. Demnach hat zum Beispiel die letzte Zeile von $\mathcal{R}(E_n)$ den Wert $0(0111)^*0 = 00111 \dots 01110$.

Die Angaben in Tabelle 2 sind als Induktionsbehauptung zu verstehen. Zu dieser Behauptung gehört auch, dass die Matrizen $\mathcal{R}(A_n) \dots \mathcal{R}(H_n)$ partielle Lösungen sind: Alle nicht aus den Tabelleneinträgen hervorgehenden Elemente dieser Matrizen sind 1. Aus der Induktionsbehauptung für $\mathcal{R}(A_n) \dots \mathcal{R}(D_n)$ sind die entsprechenden Einträge der Tabelle für $\mathcal{R}(E_n) \dots \mathcal{R}(H_n)$ herzuleiten, daraus diejenigen für $\mathcal{R}(A_{n+1}) \dots \mathcal{R}(D_{n+1})$.

Für $n = 1$ prüft man die Induktionsbehauptung, zum Beispiel anhand von Abb. 10, direkt nach. In der Abbildung sind die Matrizen $\mathcal{R}(A_1) \dots \mathcal{R}(H_1)$ umrahmt, damit man nur aus Nullen bestehende Randspalten und -zeilen besser erkennt.

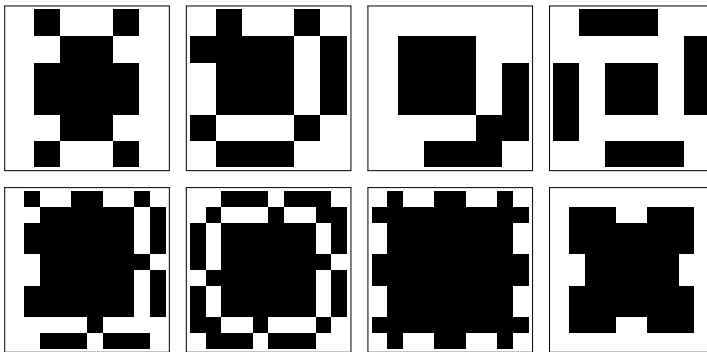


Abb. 10: Die Matrizen $\mathcal{R}(A_1) \dots \mathcal{R}(H_1)$

Der Induktionsschritt muss für jede der acht Matrizen einzeln nachgerechnet werden. Das soll hier nur für die Matrix $\mathcal{R}(E_n)$ durchgeführt werden, wo die Rechnung wegen der fehlenden Symmetrie am wenigsten offensichtlich ist. Die Behandlung der übrigen sieben Fälle verläuft ähnlich.

¹ Mit Rand sind hier jeweils die beiden ersten bzw. letzten Zeilen oder Spalten einer Matrix gemeint

Für $\mathcal{R}(E_n)$ erhält man die erste Zeile durch Konkatination der ersten Zeilen von $\mathcal{R}(A_n)$ und $\mathcal{R}(B_n)$, die nach Induktionsannahme beide den Wert $0(1001)^*0$ haben, mit einer Überschneidung von zwei Elementen: Man erhält also $0(1001)^*100(10+01)001(1001)^*0 = 0(1001)^*10011001(1001)^*0 = 0(1001)^*0$ als erste Zeile. Die zweite Zeile von $\mathcal{R}(E_n)$ erhält man entsprechend: $001^*(00+11)1^*01 = 001^*111^*01 = 001^*01$.

Für dieses Konkatenieren zweier Vektoren mit Überschneidung an den letzten bzw. ersten zwei Elementen wird im Folgenden das Symbol \bowtie verwendet: $(x_1, \dots, x_k) \bowtie (y_1, \dots, y_l) = (x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} + y_1, x_k + y_2, y_3, \dots, y_l)$. Es wird immer auf zwei Zeilen oder Spalten zugleich angewendet. Die eben durchgeführte Rechnung schreiben wir damit in der leichter lesbaren Form

$$\begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 001^*00 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 1^*01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(1001)^*100(10+01)001(1001)^*0 \\ 001^*(00+11)1^*01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(1001)^*0 \\ 001^*01 \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite von $\mathcal{R}(E_n)$ entsteht aus den rechten Seiten von $\mathcal{R}(B_n)$ und $\mathcal{R}(D_n)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0(1110)^*0 \\ 1(0001)^*0 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0(1110)^*0 \\ 000(0100)^*001 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0(110)^*111(00+01)110(1110)^*0 \\ 1(001)^*000(10+00)0(0100)^*001 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0(1110)^*11101110(1110)^*0 \\ 1(0001)^*000100(0100)^*001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(1110)^*0 \\ (1000)^*01 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man die linke Seite von $\mathcal{R}(E_n)$ aus den linken Seiten von $\mathcal{R}(A_n)$ und $\mathcal{R}(C_n)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0^* \\ 1(0110)^*1 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0^* \\ 01(1100)^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0^* \\ 1(0110)^*011(01+01)(1100)^* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0^* \\ 1(0110)^*011100(1100)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^* \\ 1(0110)^*0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schließlich ist noch die untere Seite von $\mathcal{R}(E_n)$ aus derjenigen von $\mathcal{R}(C_n)$ und $\mathcal{R}(D_n)$ zu bilden. In der Rechnung steht die letzte Zeile als die äußere oben; der untere Rand von $\mathcal{R}(D_n)$ ist gleich dem oberen Rand, gelesen in umgekehrter Richtung.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0(0111)^*0 \\ 000(0010)^*011 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0(0111)^*0 \\ 100(0010)^*000 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0(0111)^*011(10+00)111(0111)^*0 \\ 000(0010)^*0(11+10)0(0010)^*000 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0(0111)^*01110111(0111)^*0 \\ 000(0010)^*0010(0010)^*000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(0111)^*0 \\ 000(0010)^*000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschluss für die Ränder von $\mathcal{R}(E_n)$ beendet; es bleibt noch zu zeigen, dass die „Nahtstellen“ in $\mathcal{R}(E_n)$ passen (vgl. Lemma 3).

Die rechte Seite von $\mathcal{R}(A_n)$ passt zur linken Seite von $\mathcal{R}(B_n)$: Dazu muss die letzte Spalte von $\mathcal{R}(A_n)$ zur zweiten Spalte von $\mathcal{R}(B_n)$ und die vorletzte Spalte von $\mathcal{R}(A_n)$ zur ersten Spalte von $\mathcal{R}(B_n)$ addiert werden:

$$\begin{pmatrix} 0^*+1^*01 \\ 1(0110)^*1+0(1001)^*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^*01 \\ 1(1111)^*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^*01 \\ 1^*0 \end{pmatrix}$$

Die resultierende Doppelspalte enthält außer am Rand nur Einsen. Analog, nur mit etwas mehr Rechnung, verläuft der Nachweis, dass die rechte Seite von $\mathcal{R}(C_n)$ zur linken Seite von $\mathcal{R}(D_n)$ passt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0(0111)^*0+100(0010)^*000 \\ 000(0010)^*011+0(0111)^*0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 00111(0111)^*0+10000(1000)^*0 \\ 000(0010)^*011+001(1101)^*110 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10111(1111)^*0 \\ 001(1111)^*101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101^*0 \\ 001^*01 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auch hier kommen also Nullen nur an den beiden jeweils äußeren Positionen vor.

Für das vertikale Zusammenpassen müssen zu den letzten zwei Zeilen von $\mathcal{R}((A_n B_n))$ die ersten zwei Zeilen von $\mathcal{R}((C_n D_n))$ addiert werden, das Ergebnis darf nur in den ersten und letzten beiden Spalten Nullen enthalten.

Die letzten zwei Zeilen von $\mathcal{R}((A_n B_n))$ sind

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 001^*00 \\ 0(1001)^*0 \end{array} \right) \bowtie \left(\begin{array}{c} 1(0001)^*0 \\ 0(1110)^*0 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} 001^*(00+10)001(0001)^*0 \\ 0(1001)^*100(10+01)110(1110)^*0 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c} 001^*1|0001(0001)^*0 \\ 0(1001)^*1001|1110(1110)^*0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 001^*|000(1000)^*10 \\ 0(1001)^*|(1110)^*0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 001^*|(0001)^*0 \\ 0(1001)^*|(1110)^*0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(Die senkrechten Striche deuten an, wo die Mitte ist, damit die Musterdarstellung eindeutig bleibt.) Die ersten zwei Zeilen von $\mathcal{R}((C_n D_n))$ erhält man analog:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 0^* \\ 01(1100)^* \end{array} \right) \bowtie \left(\begin{array}{c} 0(1110)^*0 \\ 000(0100)^*001 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} 0^*(00+01)110(1110)^*0 \\ 01(1100)^*11(00+00)0(0100)^*001 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c} 0^*|(1110)^*0 \\ 01(1100)^*110|00(0100)^*001 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0^*|(1110)^*0 \\ 01110(0110)^*|(0001)^*00001 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Addition der beiden letzten Resultate ergibt schließlich

$$\left(\begin{array}{c} 0^*+001^*|(0001)^*0+(1110)^*0 \\ 0(1001)^*+01110(0110)^*|(1110)^*0+(0001)^*00001 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 001^*|1^*0 \\ 01^*|1^*01 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 001^*0 \\ 01^*01 \end{array} \right)$$

Die beiden mittleren Zeilen von $\mathcal{R}(E_n)$ enthalten also tatsächlich nur in den ersten und letzten zwei Spalten Nullen.

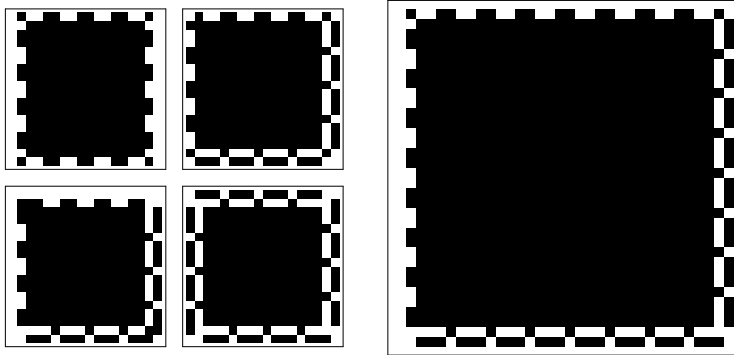


Abb. 11: Zusammenpassen von $\mathcal{R}(A_2) \dots \mathcal{R}(D_2)$ zu $\mathcal{R}(E_2)$

Abb. 11 zeigt noch einmal anschaulich am Zusammensetzen der Matrizen $\mathcal{R}(A_2) \dots \mathcal{R}(D_2)$ zu $\mathcal{R}(E_2)$ die einfache Grundidee der obigen Rechnung. Die Ränder der vier Bauteile lassen sich tatsächlich fast wie Legosteine ineinander schieben. Damit ist die E_n betreffende Zeile von Tabelle 2 bewiesen.

Wir müssen uns jetzt nur noch davon überzeugen, dass $S_n = G_n$ und $\tilde{S}_n = \lfloor H_n \rfloor$ Lösungen sind. Für S_n folgt dies unmittelbar aus der Bemerkung, dass die inneren Randzeilen von $\mathcal{R}(G_n)$, die nach der Tabelle nur

Einsen enthalten, mit den äußeren Zeilen (bzw. Spalten) von $\mathcal{T}(G_n)$ übereinstimmen, sodass diese Matrix insgesamt nur Einsen enthält.

Um $\mathcal{T}([H_n]) = e$ nachzuweisen, zeigt man, dass die ersten Spalten der Matrizen A_n, C_n, E_n und H_n nur Nullen enthalten. Für A_1 und C_1 sieht man das, der Rest folgt aus den Gleichungen (3) und (4) mit einer einfachen Induktion. Wegen der Symmetrie von H_n sind dann alle äußeren Zeilen und Spalten von H_n Nullvektoren. Das wiederum impliziert, dass die aus der Partiaillösung $H_n \in \mathcal{P}_{2,4^n}$ durch Weglassen der äußeren Zeilen und Spalten entstehende Matrix $[H_n]$ in $\mathcal{L}_{2,4^n-2}$ liegt. \square

Für $n = 1$ erhält man aus diesem Satz eine Lösung der zu Anfang vorgestellten 6×6 -Version des Trisentis-Spiels:

$$[H_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Kerne von \mathcal{T}_m für $m \leq 150$ hat gezeigt, dass diese für $m = 6, 8, 30, 32, 126$ und 128 alle trivial sind (vgl. Tabelle 1). Insbesondere ist also $[H_1]$ die einzige Lösung für $m = 6$. Die Vermutung liegt nahe, dass alle im Beweis von Satz 3 konstruierten Lösungen eindeutig bestimmt sind.

Auch in einem ganz anderen Sinn sind sie einzigartig: Für andere Werte von n als die aus Satz 3, bei denen der Kern ebenfalls trivial ist, sind die Lösungen keineswegs so regelmäßig strukturiert. In Abb. 12 sehen die beiden Lösungen von $n = 122$ und 130 in gewisser Weise typisch für die Fälle mit eindeutiger Lösung aus, wogegen für $n = 126$ und 128 ($n = 128$ ist in Abb. 9 zu sehen) die Lösungsmatrizen einen ganz uncharakteristisch gleichmäßigen Aufbau zeigen.

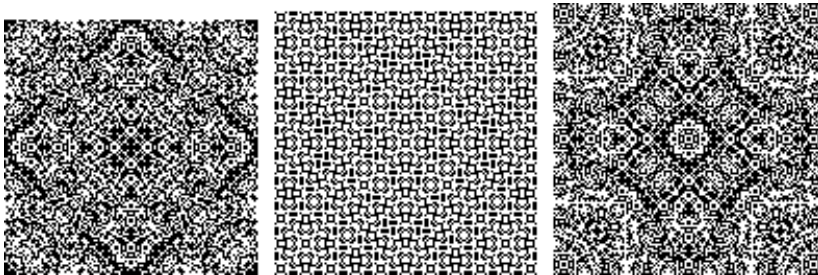


Abb. 12: Die Lösungen von $n = 122, 126$ und 130

Die Frage bleibt offen, ob es für jede gerade Zahl n eine Lösung gibt. Zu ihrer Beantwortung wird man die Trisentis-Abbildung $\mathcal{T}_{n \times m}$ mit $n \neq m$ in die Überlegungen einbeziehen müssen. Vielleicht lohnt es sich auch, das durch Gleichung (1) definierte Problem über anderen Ringen als \mathbb{F}_2 zu betrachten. Die obige Lösung $[H_1]$ findet man zum Beispiel als Quotient modulo 2 der

Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

die die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, dass für jeden Eintrag die Summe seiner Nachbarelemente dieselbe ungerade Zahl ergibt. Andererseits sind keineswegs alle Lösungen von $\mathcal{T}_n(X) = e$ durch Matrizen über \mathbb{Z} induziert.

Danksagung Mein Dank gilt Peter Ullrich für zahlreiche Diskussionen zum Trisentis-Spiel und Ludger Sasse, der mir die in Abb. 1 wiedergegebene Hardware-Version des Spiels gebaut hat, mit der viele Kinder und Erwachsene — auch solche, die jedes Spiel am Computer-Bildschirm verweigern würden — begeistert gespielt haben.

Literatur

1. M. Anderson and T. Feil. Turning lights out with linear algebra. *Math. Mag.*, 71:300–303, 1998.
2. P. V. Araújo. How to turn all the lights out. *Elem. Math.*, 55:135–141, 2000.
3. R. Barua and S. Ramakrishnan. σ -game, σ^+ -game and two-dimensional additive cellular automata. *Theor. Comp. Sci.*, 154:349–366, 1996.
4. J. A. Beidler. Think-a-dot revisited. *Math. Mag.*, 46:128–136, 1973.
5. Y. Dodis and P. Winkler. How to light any graph. <http://www.toc.lcs.mit.edu/~yevgen/academic.html>, 1998.
6. T. E. Gantner. The game of Quatrainment. *Math. Mag.*, 61:29–34, 1988.
7. O. P. Lossers. An all-ones problem. *Amer. Math. Monthly*, 100:806–807, 1993.
8. D. Pelletier. Merlin’s magic square. *Amer. Math. Monthly*, 94:143–150, 1987.
9. S. Puckett. Quatrainment. *COMPUTE*, 6:76–91, 1984.
10. P. Sarkar and R. Barua. Multidimensional σ -automata, π -polynomials and generalized S-matrices. *Theor. Comp. Sci.*, 197:111–138, 1998.
11. D. L. Stock. Merlin’s magic square revisited. *Amer. Math. Monthly*, 96:608–610, 1989.
12. K. Sutner. On σ -automata. *Complex Systems*, 2:1–28, 1988.
13. K. Sutner. Linear cellular automata and the Garden-of-Eden. *Math. Intelligencer*, 11:49–53, 1989.
14. K. Sutner. The σ -game and cellular automata. *Amer. Math. Monthly*, 97:24–34, 1990.
15. K. Sutner. σ -automata and Chebyshev polynomials. *Theor. Comp. Sci.*, 230:49–73, 2000.