Erschienen in: Spektrum der Wissenschaft 1/2003, 110 – 113.

Wie kommt man nach Disentis?

Achim Clausing

1 Schlechtes Wetter in Disentis

Disentis liegt am Oberrhein, da wo der Fluss noch ganz jung und von hochalpinen Gipfeln umgeben ist. Es ist ein schöner Ort, man kann dort eine alte Benediktinerabtei besichtigen, wandern, nach Gold schürfen, und natürlich kann man in Disentis wunderbar Ski fahren.

Wie kommt man nach Disentis? Am besten nimmt man die Bahn, genauer: Die feuerrote Furka–Oberalpbahn, entweder von Chur aus durch das wildromantische Rheintal oder von Andermatt aus über den im Winter verschneiten Oberalppass.

Aus ganz anderer Sicht stellt sich die Titelfrage, wenn man beim Skifahren hoch über Disentis von einem Schlechtwettereinbruch im Restaurant der Bergbahn festgehalten wird. Die Gondel hat den Betrieb eingestellt und die Talabfahrt ist längst im Nebel verschwunden… Hat man außerdem noch einen siebenjährigen Sohn dabei, der mit dem Verzehr von Ovomaltine und Kuchen höchstens fünf Minuten lang ausgelastet ist, dann kann es passieren, dass aus der Frage „Wie kommt man nach Disentis?“ ein Spiel gemacht werden muss.

Das Spiel geht so: Man nimmt einen der in vielen Exemplaren herumliegenden bunten Prospekte mit zahllosen wunderschönen Bildern der sonnenbeschienenen Schneelandschaft um Disentis (von der im Moment leider draussen so gar nichts zu sehen ist) und zerschneidet eines der Fotos in 25 quadratische Teile. Diese werden ausgelegt und mit ihrer Bildseite nach unten gedreht (die Rückseiten sind blau). Der Filius darf nun so oft er mag eines der blauen verdeckten Teilbilder aussuchen und muss dann die *benachbarten* Zettel (bis zu acht Stück) umdrehen. Der ausgesuchte Zettel selbst wird nicht mit umgedreht, den muss man von einem blauen Nachbarn aus umdrehen. Spielziel ist es, das ganze Bild wieder sichtbar zu machen — dann ist man „nach Disentis gekommen“. Es müssen aber jedesmal *alle* Nachbarn umgedreht werden und darunter sind in der Regel auch solche, die schon aufgedeckt wurden. Deren Bildmotive müssen leider wieder nach unten gedreht werden.

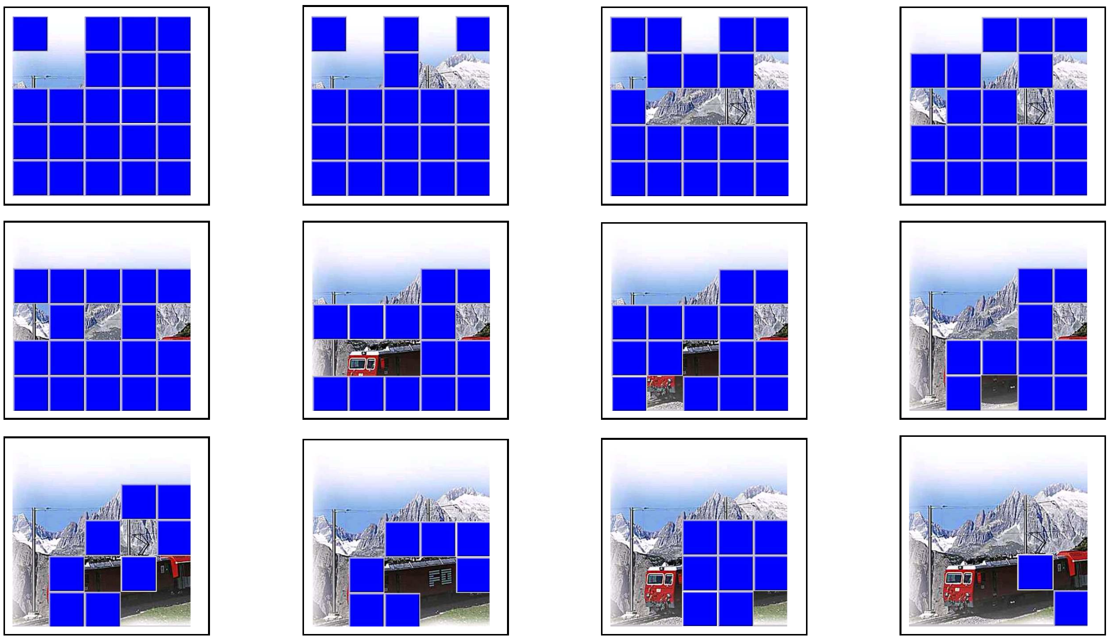
So dauert das Spiel, ganz im Sinne des Erfinders, eine ordentliche Weile und lange, bevor wir damit „nach Disentis gekommen“ sind, hat die Seilbahn wieder geöffnet und die Familie schwebt zufrieden in den eben noch so unerreichbaren Ort hinunter.

Später, der Sohn hat die Sache längst vergessen, plagt den Vater die Neugierde: Wäre es überhaupt möglich gewesen… ? Und falls ja, wie schwierig ist das Spiel? Wie findet man eine Lösung? Gibt es vielleicht mehrere Lösungen? Kann man das Bild für andere Zerschnipselungen anstelle von 5×5 sichtbar machen?

Klar ist erstmal nur: Das letzte blaue Teilstück, wenn man es denn soweit geschafft hat, alle anderen aufzudecken, kann man nicht freilegen. Es hat ja keinen blauen Nachbarn, mit dessen Hilfe man es umdrehen könnte. Na gut, wir erlauben, dass dieses letzte Bild direkt umgedreht wird.

Der erste Schritt zur Beantwortung der vielen Fragen besteht darin, das lästige Umdrehen der Bildchen loszuwerden. Dazu verlegt man das Spiel auf den Bildschirm eines Computers. Beim Start trifft man auf 5×5 quadratische blaue Felder, die beim Anklicken mit der Maus ihre Nachbarfelder zwischen den beiden Zuständen „blau“ und „Bild sichtbar“ hin- und herschalten. Nur das Anklicken des letzten blauen Knopfs schaltet diesen selbst um. Wer das Spiel ausprobieren möchte, kann das unter der Internet–Adresse `http://cs.uni-muenster.de/disentis` tun. Der Browser muss dazu Java–fähig sein. Die Größe des Spielfelds kann von 2×2 bis 12×12 variiert werden.

Bevor Sie sich nun an den Rechner setzen, ist eine Warnung angebracht: Nach Disentis gelangt man nicht in ein paar Minuten. Kaum hat man mit dem Spiel angefangen, verliert man sich in der Klickerei, wundert sich, wenn man nach einer halben Stunde noch immer nicht am Ziel ist, freut sich an den Mustern, die man herbeiklicken kann oder daran, dass man alle Felder bis auf gerade mal zwei blaue aufgedeckt hat, und ärgert sich zugleich, weil der Weg von zwei blauen Feldern zu einem einzigen allem Anschein nach nicht kürzer ist, als der von 25 zu einem. Nein, es ist keineswegs einfach, nach Disentis zu kommen. (Es sei denn, man stellt eine Spielfeldgröße von 2 oder 3 ein. Dann geht alles wie von selbst.)



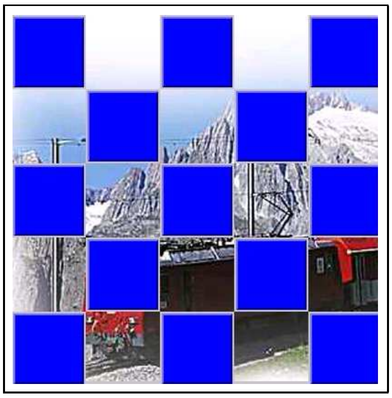
Die Eingaben notiert man am besten in tabellarischer Form. Der Eintrag $\substack{9\\12}$ bedeutet, dass dieses Feld im 9. und 12. Schritt angeklickt wird. Beim Spielen von Hand müsste man dabei 75 Kärtchen umdrehen: 3 um jedes Eckfeld, 5 um jedes der beiden Randfelder und 8 um innen liegende Felder.

1				2
	4	3	5	
	6			10
	8		9 / 12	
7		11		

Nur ein einziges blaues Feld zuviel! So nahe dem Ziel, und doch so fern...

Box 1: Ein Spielverlauf, der scheinbar fast bis zum Ziel führt

In Box 1 kann man einen Spielverlauf sehen, der auf direktem Weg zu einer Situation mit nur noch zwei blauen Feldern führt. Probieren Sie, ob Sie von dieser Situation aus schneller ans Ziel gelangen, als von der ursprünglichen!

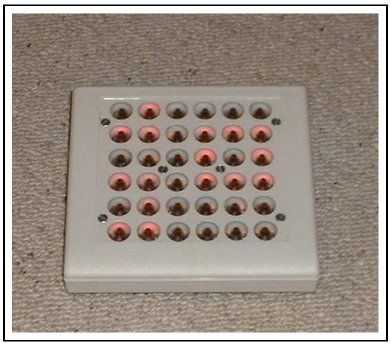


Einige regelmäßige Konfigurationen sind tatsächlich leicht zu erreichen. Zum Beispiel erhält man mit nur fünf Klicks (in die Mitte und die vier Ecken) ein Schachbrettmuster. Mit dem umgekehrten Schachbrett, bei dem die Ecken aufgedeckt sind, tut man sich allerdings erheblich schwerer. Richtig frustrierend wird die Sache jedoch dann, wenn man nach langem Herumklicken plötzlich durch Zufall das letzte blaue Feld vor sich hat. Man klickt es an, das ganze Bild ist da, man ist sozusagen in Disentis angelangt – und hat den Weg vergessen. Noch immer hat man keine Ahnung, wie man nach Disentis kommt.

2 Ein Umweg hilft vielleicht weiter

Wenn man sein Ziel nicht auf dem direkten Weg erreichen kann, hilft manchmal ein Umweg weiter. In unserem Fall führt der Umweg über Trisentis. Auf der Landkarte der Schweiz sucht man vergebens danach: Der Name steht für eine trivialere Variante des Disentis–Spiels[1], bei der es erlaubt ist, jedes beliebige Feld anzuklicken und damit dessen Nachbarfelder zwischen den zwei Zuständen „verdeckt“ und „sichtbar“ hin- und herzuschalten. Damit hat man viel mehr Einflussmöglichkeiten als bei der ursprünglichen Version. Auch die gesonderte Behandlung, die wir dem letzten verdeckten Feld geben mussten, erübrigt sich, wenn man alle Felder betätigen kann.

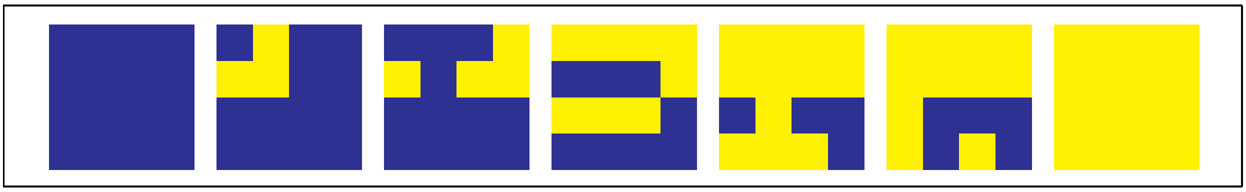
Trisentis kann man ebenfalls auf der oben angegebenen Webseite ausprobieren. Um es optisch vom Disentis–Spiel zu unterscheiden, werden aufgedeckte Karten bei Trisentis als gelbe Quadrate (ohne Bild) dargestellt. Spielziel ist natürlich weiterhin, alle Karten aufzudecken, also ein gelbes Spielfeld zu erreichen.



Trisentis kann man außer im Web auch an einem Hardware–Exemplar spielen. Es hat die Größe 6×6 und wird von Kindern als eine Art Gameboy gerne und mit erstaunlicher Ausdauer benutzt. Die Konstruktion ist im Prinzip sehr einfach: Man benötigt 36 Schalter mit je einer LED und einem Transistor. Der Transistor dient als 1-Bit-Speicher, er wechselt jedesmal seinen Zustand, wenn der Schalter gedrückt wird. Die LED zeigt durch ihr Leuchten an, dass sie im Zustand „sichtbar“ (entsprechend der Farbe gelb) ist. An ihrem Eingang hängt ein Parity–Checker, ein Logik–Bauteil mit einem 8-Bit-Eingang und einem 1-Bit-Ausgang. Der Ausgang liegt genau dann auf 1, wenn eine ungerade Anzahl der acht Eingangsbits den Wert 1 haben. Die acht Eingänge sind mit den Transistoren der Nachbarfelder verbunden, sodass die LED immer dann ihren Beleuchtungszustand wechselt, wenn einer ihrer Nachbarschalter betätigt wird. Durch Ausblenden von Schaltern mit einer Maske kann man damit auch kleinere Spielfeldgrößen realisieren, beispielsweise 4×4 durch Zudecken der Randzeilen.

Das Trisentis–Spiel der Größe 4×4 ist wirklich kinderleicht zu lösen: 6 Klicks genügen zum Erreichen des Spielziels, alle Felder gelb zu bekommen:

[1] (*Trivial*: Abgeleitet vom Trivium der Scholastik, den unteren drei der sieben artes liberales (Grammatik, Logik und Rhetorik). Der lateinische Ursprung tres viae (drei Wege) weist darauf hin, dass man ausgehend von einer Lösung des Trisentis–Spiels auf mehreren Wegen nach Disentis gelangt.



Die Eingabefolge für diesen Ablauf ist in der Notation von Box 1:

1		2	
	3		
	4		
5		6	

Wer damit ein bisschen experimentiert, stellt schnell fest, dass die Reihenfolge der Eingaben für das Resultat unerheblich ist. In welcher Anordnung man die numerierten Felder auch anklickt, das Spielfeld wird in jedem Fall gelb. Die Zwischenzustände sind keineswegs bei allen Eingabereihenfolgen dieselben, wohl aber das Endergebnis. Man kann unterwegs noch andere, nicht numerierte Felder anklicken, durch späteres nochmaliges Anklicken kann man das wieder rückgängig machen. Für den Endzustand ist nur wichtig, ob die Anzahl der Klicks auf ein Feld ungerade oder gerade war. Der Zustand eines Felds ändert sich ja nur dann, wenn man eines seiner Nachbarfelder „betritt“. Die Reihenfolge, in der man die Nachbarfelder anklickt, hat für den Zustand keine Bedeutung.

Auch beim Disentis–Spiel hängt die Wirkung einer Zugfolge nicht von der Anordnung der Klicks ab. Trotzdem muss man deren Reihenfolge genau beachten: Man kann ja nur auf Felder klicken, die blau sind – und welche das sind, dafür spielen die Zwischenzustände des Spiels, also die Reihenfolge der Züge, eine ganz erhebliche Rolle. Aus diesem Grund ist Trisentis einfacher zu spielen als Disentis, obwohl es noch schwierig genug ist.

Das Wesentliche eines Trisentis–Spielverlaufs wird offenbar durch eine Matrix aus Nullen und Einsen (eine Bitmatrix) beschrieben, bei der die Einsen die Felder angeben, die anzuklicken sind. Im vorangehenden Beispiel ist das die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese unsymmetrische Matrix kann man an der Senkrechten oder an einer ihrer Diagonalen spiegeln, die Wirkung bleibt dieselbe. Was passiert, wenn man die Matrix und eine ihrer gespiegelten Varianten eingibt? Dann werden alle Felder zweimal umgeklappt, das Spiel ist wieder im Ausgangszustand. Dasselbe erreicht man, wenn man die beiden Matrizen elementweise addiert, wobei man $1 + 1 = 0$ rechnet, und nur die Einsen aus der Summenmatrix eingibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiert man nun noch eine weitere der gespiegelten Matrizen dazu, dann wechseln wieder alle Felder ihre Farbe. Man bekommt eine neue, von der ersten wesentlich verschiedene Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann das durch Anklicken der entsprechenden 10 Felder bestätigen, aber schon durch bloßes Hinschauen kann man sich davon überzeugen, dass in der letzten Matrix jedes der 16 Bits eine ungerade Anzahl von Einsen als Nachbarn hat. Und das ist genau die Eigenschaft, die eine Bit-Matrix zu einer Lösung des Trisentis–Spiels macht.

Wer zwei Semester Mathematik studiert hat, nickt an dieser Stelle und stellt fest, dass hinter dem Ganzen offenbar ein Stück Lineare Algebra über dem Körper $\mathcal{F}_2$ steckt. Für das $n \times n$–Trisentis–Spiel sind n^2 lineare Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten zu lösen. Mit Computerunterstützung ist diese Berechnung für nicht allzu große n kein Problem.

Für ein Urlaubsspiel ist dieser Zugang aber eigentlich nicht das Wahre. Glücklicherweise gibt es auch einen Weg, der ganz ohne Rechnen zum Ziel führt und der zudem den Vorteil hat, dass er unterwegs manchen Ausblick bietet, den man bei der Reise mit dem Hochgeschwindigkeitszug Computer gar nicht wahrnehmen würde.

3 Wie man nach Trisentis kommt

Wenn man beim Disentis– oder Trisentis–Spiel einfach drauflos klickt, verläuft man sich sehr leicht, man findet man weder zum Ziel noch zurück in die Ausgangskonfiguration. Zumindest bei Trisentis kann man aber aus jeder Konfiguration heraus jede andere ansteuern, wenn man den *Zeilenalgorithmus* kennt.

Um die Felder einer Zeile in einen gewünschten Zustand zu bringen (zum Beispiel alle gelb), besucht man von links nach rechts alle Felder der darunter liegenden Zeile, beginnend mit dem *zweiten* Feld. Immer dann, wenn das schräg links über dem gerade besuchten Feld liegende Feld die falsche Farbe hat, klickt man und gibt ihm so die richtige Farbe.

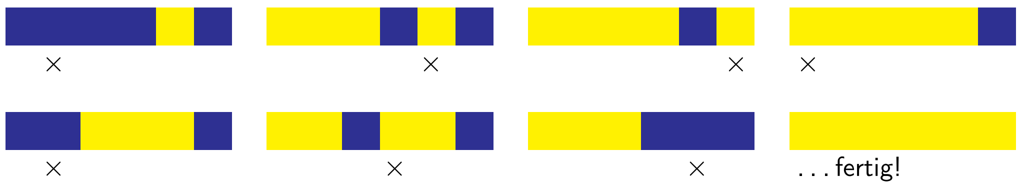
Auf diese Weise kann man die Felder einer Zeile mit Ausnahme des letzten Felds in den gewünschten Zustand bringen. Weil man von schräg unten klickt und nach rechts fortfährt, machen die weiteren Eingaben nichts mehr kaputt. Wenn das letzte Feld der oberen Zeile nun auch die richtige Farbe hat, ist diese Zeile „fertig“. Andernfalls klickt man das erste Feld der unteren Zeile an, das man noch nicht berührt hatte und durchläuft die Zeile ein zweites Mal, wobei man wieder die schräg links darüber liegenden Farben nach Bedarf korrigiert.

Box 2 zeigt das Verfahren am Beispiel einer Zeile der Länge 6.

Der Zeilenalgorithmus ist nicht uneingeschränkt anwendbar. Die unterste Zeile des Spielfelds kann man mit ihm nicht in den gewünschten Zustand bringen – zu ihr gibt es keine darunter liegende Zeile. Außerdem funktioniert das Verfahren nur dann mit Sicherheit, wenn die Zeilenlänge n bei Teilung durch 3 den Rest 0 oder 1 hat. Wenn n den Rest 2 hat, kann es vorkommen, dass auch nach dem zweiten Durchgang die darüber liegende Zeile im letzten Feld wieder die falsche Farbe hat. (Das liegt daran, dass jedes innere Feld der unteren Zeile zu drei Felder der oberen Zeile benachbart ist, während die beiden Randfelder nur zwei Nachbarn in der oberen Zeile haben.)

Am besten übt man das Verfahren mit einem 6×6–Spielfeld. Nach kurzer Zeit beherrscht man die Regel und kann dann auch ein völlig durcheinander gebrachtes Spiel in jede gewünschte Konfiguration (blau, gelb, Schachbrett, ...) bringen – mit Ausnahme der letzten Zeile.

Das Kreuz gibt an, wo in der darunter liegenden Zeile jeweils geklickt wird. In diesem Fall soll die Zeile gelb werden, also wird schräg rechts unter dem am weitesten links liegenden blauen Feld geklickt. Der zweite Durchgang beginnt mit einem Klick unter das erste Feld; er ist nötig, weil beim ersten Durchgang das letzte Feld blau geblieben ist.



Hätte man gleich richtig geraten, dass Feld 1 angeklickt werden muss, dann hätte ein Durchgang mit drei Klicks in die Felder 1, 4 und 6 genügt. Mit etwas Übung kann man sich das Verfahren oft noch vereinfachen.

Box 2: Der Zeilenalgorithmus

Wie kann man die unterste Zeile auch noch in Ordnung bringen? Dazu erinnern wir uns daran, dass beim Zeilenalgorithmus bisher noch keine Eingaben in die oberste Zeile des Spielfelds gemacht worden sind. Wenn dort die richtigen Felder angeklickt werden, dann kann man mit einer zweiten Anwendung des Zeilenalgorithmus' auch die letzte Zeile passend machen. Aber welches sind die richtigen Felder?

Um das herauszufinden, muss man erst mal ausgiebig blau machen. Und zwar das Trisentis–Spielfeld. Man klickt in der ersten Zeile ein einzelnes Feld an und färbt dann mit dem Zeilenalgorithmus das ganze Spielfeld blau. Mit der letzten Zeile wird das nicht gelingen, hier bleiben gelbe Felder übrig. So ergibt etwa beim 6×6–Trisentis die Eingabe (1 0 0 0 0 0) in Zeile 1 (also das Anklicken von Feld 1 in Zeile 1) beim Blaumachen als sechste Zeile den Zustand (0 1 1 1 0 0), weil die Felder 2, 3 und 4 gelb bleiben. Auf dieselbe Weise findet man die Wirkung einer 1 an anderen Stellen der ersten Zeile:

Eingabe in die 1. Zeile	Resultat in der 6. Zeile
(1 0 0 0 0 0)	(0 1 1 1 0 0)
(0 1 0 0 0 0)	(1 1 0 1 1 0)
(0 0 1 0 0 0)	(1 0 1 0 1 1)
(0 0 0 1 0 0)	(1 1 0 1 0 1)
(0 0 0 0 1 0)	(0 1 1 0 1 1)
(0 0 0 0 0 1)	(0 0 1 1 1 0)

Jetzt kann man kombinieren: Die Eingabe

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) + (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) + (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0) = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$$

ergibt, wenn man alle Felder der Zeile 1 bis 5 blau macht, die sechste Zeile

$$(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0) + (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0) + (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$$

(Natürlich wird dabei wieder mit $1 + 1 = 0$ gerechnet.)

Aha! Man kann den Zustand eines einzelnen Felds der letzten Reihe ändern. (Alle anderen Felder sind ja blau geblieben, haben also ihren Zustand beibehalten.) Weiteres Probieren mit der vorangehenden Tabelle zeigt, wie man jedes Feld der letzten Zeile einzeln beeinflussen kann. Das Ergebnis, wieder tabellarisch:

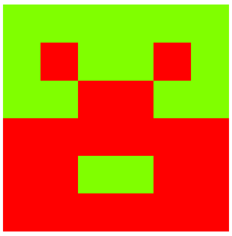
Eingabe in die 1. Zeile	Resultat in der 6. Zeile
(0 0 0 1 1 1)	(1 0 0 0 0 0)
(0 0 1 1 0 1)	(0 1 0 0 0 0)
(0 1 1 0 1 1)	(0 0 1 0 0 0)
(1 1 0 1 1 0)	(0 0 0 1 0 0)
(1 0 1 1 0 0)	(0 0 0 0 1 0)
(1 1 1 0 0 0)	(0 0 0 0 0 1)

Damit wissen wir, wie man „nach Trisentis kommt“: Ein erster Durchgang mit dem Zeilenalgorithmus dreht alle Felder auf die gelbe Seite bis auf, möglicherweise, einige Felder in der untersten Reihe. Man sieht nach, welche das sind, addiert (im Kopf?) die entsprechenden Eingaben für die erste Zeile, klickt diese Felder an und macht einen zweiten Durchgang mit dem Zeilenalgorithmus. Und diesmal passiert das Wunder: Das Spiel geht auf, auch die letzte Zeile wird gelb. In Box 3 sieht man den Lösungsweg für $n = 6$. Wer die ersten drei Zeilen der Tabelle, also die Muster (0 0 0 1 1 1), (0 0 1 1 0 1) und (0 1 1 0 1 1), im Kopf hat – die drei anderen sind symmetrisch dazu –, kann nun auch die letzte Zeile in jede beliebige Ordnung bringen.

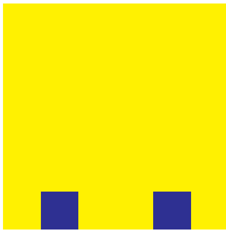
Die Ausgangssituation ist ein blaues 6×6–Spielfeld.

Erster Durchgang des Zeilenalgorithmus (grün steht für 0, rot steht für 1, also anklicken):

Eingaben



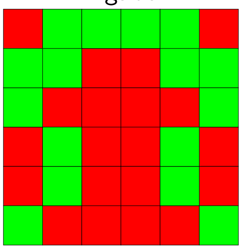
Resultat



Die blauen Felder 2 und 5 in der letzten Reihe haben die falsche Farbe. Die Eingabe in Zeile 1, die das Feld 2 ändert, ist laut Tabelle (0 0 1 1 0 1), die Eingabe für Feld 5 ist (1 0 1 1 0 0). Also muss in der ersten Zeile $(0\;0\;1\;1\;0\;1) + (1\;0\;1\;1\;0\;0) = (1\;0\;0\;0\;0\;1)$ angeklickt werden.

Zweiter Durchgang des Zeilenalgorithmus mit der obersten Zeile (1 0 0 0 0 1):

Eingaben



Resultat

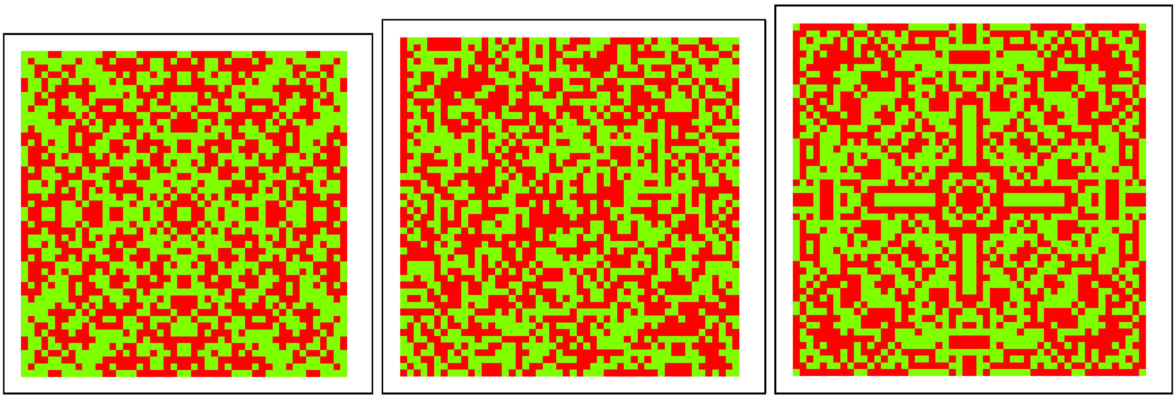
Wenn man die beiden Eingaben addiert, findet man fur das 6×6–Trisentis–Spiel eine Lösung mit 16 Klicks. In welcher Reihenfolge man die 16 Felder anklickt, spielt keine Rolle, man erreicht das Ziel auf verschiedenen Wegen.

Box 3: Die Lösung des 6×6–Trisentis–Spiels

Nicht für alle n kann man das Spiel auf diese Weise lösen. So gibt es für alle ungeraden n Konfigurationen des Spielfelds, die nicht erreichbar sind. Zu diesen gehört auch das gelbe Spielfeld – Trisentis ist nur für gerade n lösbar! Auch bei geradem n kann man nicht immer alle Konfigurationen herbeiklicken, mindestens bis $n = 150$ ist aber für gerades n „gelb“ immer möglich.

Für manche Werte von n gibt es genau eine Lösung, die dann in der Regel eine schöne Symmetrie besitzt, für andere dagegen sehr viele, meist weniger schöne. In Box 4 sieht man drei Beispiele für dieses Verhalten.

Die Abbildungen zeigen die Eingaben, die nötig sind, um das $n \times n$–Spielfeld gelb zu färben. Wie in Box 3 sind die roten Quadrate anzuklicken. (Das sollte man besser nicht von Hand versuchen.) Jedes einzelne Quadrat, ob rot oder grün, hat eine ungerade Anzahl von roten Nachbarn! Die Lösungen für $n = 48$ und $n = 52$ sind jeweils die einzig möglichen. Anders für $n = 50$, hier gibt es $2^{16} = 65536$ verschiedene Lösungen.



Box 4: Lösungen von Trisentis für $n = 48, 50$ und 52

4 Von Trisentis nach Disentis

Der Weg ist das Ziel, und schon mancher hat über den Schönheiten des Wegs seine ursprünglichen Pläne ganz aus den Augen verloren. Es ist auch durchaus lohnend, bei (in?) Trisentis zu verweilen, das Spiel gibt Anlass zu mancherlei Entdeckungen – weit mehr als nur die, die hier erwähnt wurden.

Aber der eine oder die andere ist vielleicht doch neugierig, wie man von Trisentis nach Disentis kommt. Einen markierten Weg, also eine Vorschrift wie den Zeilenalgorithmus für Trisentis, gibt es zwar bisher nicht. Das Ziel liegt aber in greifbarer Nähe und man kommt ganz gut querfeldein – ohne einen algorithmischen Weg – durch.

Was ist zu tun? Um das Bild der Furka–Bahn freizulegen, muss man zunächst das Trisentis–Spiel der entsprechenden Größe lösen, und zwar so, dass ein einzelnes blaues Quadrat übrigbleibt (das Feld, das sich beim letzten Klick selbst umdreht). Die Eingaben für diese Trisentis–Lösung versucht man dann in eine solche Reihenfolge zu bringen, dass jeder Klick in ein blaues Feld erfolgt. Man darf zusätzlich Klicks in Felder machen, die nicht in der Trisentis–Lösung auftauchen, aber diese muss man später wieder rückgängig machen. Genauer gesagt: Eventuelle andere Felder müssen eine gerade Anzahl von Malen angeklickt werden – am besten 0 mal.

Für das Suchen einer geeigneten Reihenfolge gibt es eine einfache Heuristik, die in vielen, aber keineswegs allen Fällen zum Erfolg führt. Sie geht aus von einer Trisentis–Lösung, bei der das übrigbleibende Quadrat in der untersten Zeile steht. Deren Eingabefelder klickt man zeilenweise an. Ist eines der Eingabefelder nicht blau, so wird es übersprungen, sobald es durch weitere Eingaben blau wird, holt man die verpasste Eingabe nach.

Das Verfahren kommt zum Erliegen, wenn kein Eingabefeld mehr blau ist. Dann muss man ein Hilfsfeld anklicken. Diese Eingabe muss später wieder rückgängig gemacht werden. Für die Wahl solcher Hilfsfelder kann man allenfalls wieder heuristische Regeln angeben, man wählt zum Beispiel möglichst ein blaues Nachbarfeld. Meistens kann man auf diese Weise vermeiden, ganz „steckenzubleiben".

Die Box 5 zeigt, wie man mit dieser Strategie eine Lösung für das 5×5–Disentis–Spiel findet, in der drei Hilfsfelder benutzt werden. Mit den 20 Klicks dieser Lösung erreichen wir, wie zu Beginn unserer Geschichte schon einmal mit der Bergbahn, Disentis am äußersten Ortsrand: Das letzte blaue Feld liegt in einer Ecke des Spielfelds. Ein letzter Klick, und auch dieses Feld ist aufgedeckt. Endlich liegt das Bild der Furka–Oberalp–Bahn ohne störende blaue Quadrate vor uns.

Aber die Furka–Oberalp–Bahn hält doch in der Ortsmitte von Disentis! Wäre es nicht schön, wenn wir dort aussteigen könnten? Für uns bedeutet das, eine Folge von Eingaben zu konstruieren, bei der das mittlere Quadrat des Spielfelds als letztes übrigbleibt. Das geht tatsächlich, sogar in weniger als 20 Schritten. Finden Sie den Weg?

Literatur
A. Clausing: Das Trisentis–Spiel
Math. Semesterber. 48 (2001) 1, 29–48

Prof. Dr. Achim Clausing
Institut für Informatik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Münster
Einsteinstr. 62
48149 Münster

Email: achim.clausing@uni-muenster.de

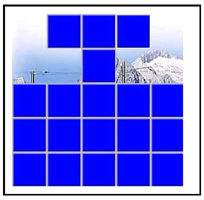
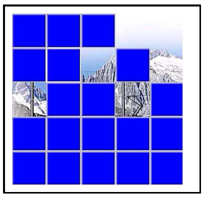
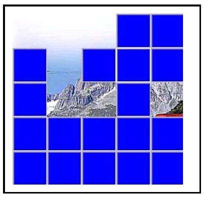
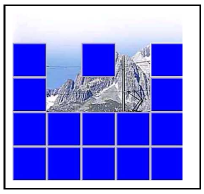
Schritt A: Mit dem Zeilenalgorithmus findet man heraus, welche Eingaben bei Trisentis ein blaues Feld in der rechten unteren Ecke hinterlassen. Am einfachsten geht das, indem man die erste Zeile durch Probieren ermittelt und dabei mit der Hypothese arbeitet, dass die erste Spalte und die erste Zeile gleich sind. (Das liegt nahe, weil das Resultat bzgl. der Diagonalen symmetrisch sein soll.) Dann muss man nur Eingaben in den Zeilen und Spalten 2 bis 5 probieren. Für die meisten der 2^5 möglichen ersten Zeilen und Spalten sieht man nach ganz wenigen Klicks, dass das Ziel nicht erreicht wird. Mit der ersten Zeile $(0\,1\,0\,1\,0)$ ergibt sich die Lösung in dem Kästchen rechts oben.

	1		1	
1	1	1	1	1
	1	1	1	
1	1	1		
	1			

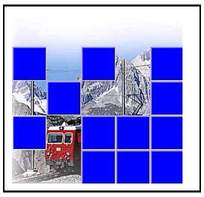
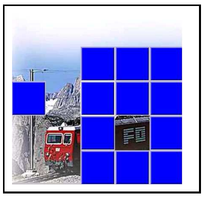
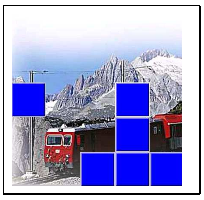
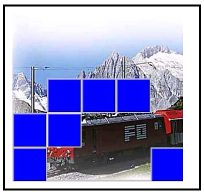
Schritt B: Die richtige Reihenfolge der Einsen muss gefunden werden. Beim zeilenweisen Vorgehen überspringt man Felder, die nicht blau sind und holt sie sobald wie möglich nach. Wenn irgendwann keines der noch anzuklickenden Felder blau ist, wird ein Hilfsfeld gewählt. Rechts sieht man das Endergebnis, unten den Ablauf. Die drei Felder rechts unten (mit doppelten Einträgen) sind Hilfsfelder, sie kommen in dem in Schritt A gefundenen Schema nicht vor.

	1		2	
5	4	3	6	7
	9	10	11	
8	13	16		
	17	12 18	15 19	14 20

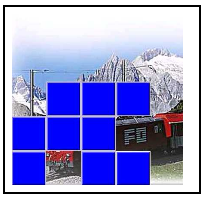
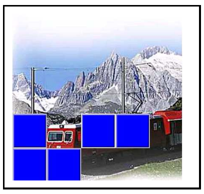
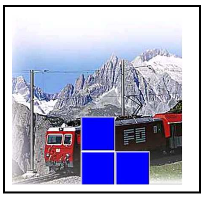
Der Ablauf im Detail: In der zweiten Zeile muss man offensichtlich mit dem mittleren Quadrat anfangen (Klick 3), dann erst kann man die beiden Felder links eingeben. Der Rest dieser Zeile ist einfach.

$\xrightarrow{1,2}$  $\xrightarrow{3,4}$  $\xrightarrow{5,6}$  $\xrightarrow{7}$ 

Jetzt wäre eigentlich die dritte Zeile dran. Dort sind aber gerade alle in Frage kommenden Felder nicht benutzbar. Also geht der 8. Klick in Zeile 4 und erst jetzt folgt die dritte Zeile. Nach dem 11. Klick wird es ernst: Keines der drei Quadrate, die noch fehlen, ist blau. Als Hilfsfeld wählen wir das mittlere Quadrat in der untersten Reihe (Klick 12).

$\xrightarrow{8}$  $\xrightarrow{9,10}$  $\xrightarrow{11}$  $\xrightarrow{12,13}$ 

Diese Situation nach Klick 13 ist der kritischste Moment der Suche. Zwei Eingaben sind noch nicht „abgearbeitet“ (Zeile 4, Feld 3 und Zeile 5, Feld 2), und zu beiden gibt es rechts unterhalb kein blaues Feld. Deshalb werden *zwei* Felder (das letzte und das vorletzte in der untersten Reihe) als Hilfsfelder eingesetzt. Damit wird Feld 3 in Zeile 4 zugänglich (Klick 16).

$\xrightarrow{14,15}$  $\xrightarrow{16}$  $\xrightarrow{17,18}$  $\xrightarrow{19,20}$ 

Der Rest (Eingaben 17 – 20) verläuft genau wie beim Zeilenalgorithmus. Klick 17 ist das letzte aus Schritt A noch verbleibende Feld, die Klicks 18 – 20 machen die Eingaben in die Hilfsfelder rückgängig. Noch ein letzter Klick, und wir sind in Disentis angekommen.

Box 5: So kommt man nach Disentis