Prof. Dr. C. Böhm
Dipl.-Math. M. Röer

Wintersemester 2009
WWU Münster

Serie 14

Aufgabe 1. Auf $(\mathbb{R}, T_{std})$ definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt: es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie ist homöomorph zu (S^1, T_{std}).

Aufgabe 2. Auf $(\mathbb{R}, T_{std})$ definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt: es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}/\sim$ ist überabzählbar, und die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}/\sim$ ist die triviale Topologie.

Aufgabe 3. Sei (D^2, T_{st}) die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius eins im $\mathbb{R}^2$ versehen mit der von der Standardtopologie des $\mathbb{R}^2$ induzierten Relativ-Topologie. Definiere die Relation $\sim$ auf D^2 wie folgt: für $x, y \in D^2$ mit $||x|| < 1$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$. Für $x, y \in D^2$ mit $||x||^2 = 1$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $y = \pm x$. Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Sei $i : D^2 \to S^2$ die Inklusion der Kreisscheibe als obere Hemisphäre. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\bar{i} : D^2/{\sim} \to \mathbb{R}P^2$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_{D^2}"'] & S^2 \arrow[d, "\pi_{S^2}"] \\ D^2/{\sim} \arrow[r, "\bar{i}"'] & \mathbb{R}P^2 \end{tikzcd}$$

Dabei seien π_{D^2} und π_{S^2} die kanonischen Projektionen.

c) Die Abbildung $\bar{i}$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4. Der Raum (D^n, T_{std}) sei mit folgender Äquivalenzrelation $\sim$ versehen: $x \sim y$ gelte genau dann, wenn $x = y$ oder $x, y \in S^{n-1}$. Setze $D^n/S^{n-1} := D^n/\sim$. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum D^n/S^{n-1} homöomorph zu (S^n, T_{std}) ist.