Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 13

Aufgabe 1. (*Fortsetzungssätze*) Sei (X, T) ein normaler Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge.

a) Sei $f : A \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine stetige Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^n$ mit $F|_A = f$.

b) Sei $f : A \to S^n$ $(n \geq 0)$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine offene Umgebung U von A und eine stetige Abbildung $F : U \to S^n$ mit $F|_A = f$.

c) In der Situation von b) existiert im Allgemeinen keine stetige Abbildung $F : X \to S^n$ mit $F|_A = f$. Zeigen Sie dies für $n = 0$.

Aufgabe 2. Ein Hausdorff-Raum (X, T) heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie:

a) Sei (X, T) ein kompakter Hausdorff-Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Dann ist X folgenkompakt.

b) Sei (X, T) ein Hausdorff-Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Dann ist X genau dann kompakt, wenn X folgenkompakt ist.

Aufgabe 3. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgenkompakte topologische Räume. Zeigen Sie: auch der Produktraum $\Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist folgenkompakt.

Aufgabe 4. (*Der Arens-Fort-Raum*) Sei $X := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Betrachte folgende Typen von Teilmengen von X:

(i) $\{(n, m)\}$ für $(n, m) \neq (0, 0)$

(ii) $U \subset X$, so daß $U_m := \{n : (m, n) \in U\} \subset \mathbb{N}_0$ endliches Komplement hat für alle $m \in \mathbb{N}_0$ bis auf endlich viele.

Zeigen Sie:

a) Das Mengensystem $B := \{U \subset X : U$ vom Typ (i) oder (ii) $\}$ ist Basis einer Topologie T auf X.

b) Der topologische Raum (X, T) genügt nicht dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 2.2.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.