Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 12

Aufgabe 1. Sei (X, T) ein topologischer Raum und seien $A, B \subset X$ Teilmengen mit $A \cap B \neq \varnothing$. Seien

$$f : (A, T_A) \to (Y, \tilde{T})\,;\, g : (B, T_B) \to (Y, \tilde{T})$$

bezüglich der Relativtopologie stetige Abbildungen in einen topologischen Raum $(Y, \tilde{T})$. Es gelte $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$.

a) Seien entweder sowohl A als auch B offen oder sowohl A als auch B abgeschlossen. Zeigen Sie: es existiert eine stetige Abbildung

$$f \cup g : A \cup B \to Y$$

so dass $f \cup g|_A = f$ und $f \cup g|_B = g$.

b) Die unter a) behauptete Aussage ist für beliebige Mengen A und B im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 2. Für $\alpha > 0$ definieren wir Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ vermittels

$$B_\alpha(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 + |y|^2 < \alpha\,,\; y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

Zeigen Sie:

a) das Mengensystem $T_{std} \cup \{B_\alpha(0) : \alpha > 0\}$ ist Basis einer Topologie T auf $\mathbb{R}^2$. Dabei bezeichne T_{std} die Standardtopologie des $\mathbb{R}^2$.

b) Die Menge $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$ ist abgeschlossen bezüglich T. Die Mengen A und $\{(0, 0)\}$ lassen sich nicht offen Mengen trennen, dass heißt, es existieren keine disjunkten Mengen $U, V \in T$ mit $A \subset U$ und $(0, 0) \in V$.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Menge $X = \mathbb{H} \cup \{a\}$, wobei $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ und $a := (0, -1) \in \mathbb{R}^2$ sei. Sei $\mathbb{H}_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Betrachte folgende Teilmengen von X:

(i) $\{p\}$ für $p \in \mathbb{H}_+$.

(ii) $X\backslash\{p\}$ für $p \in \mathbb{H}_+$.

(iii) $U_x := \{(x,0\} \cup I_x \cup I'_x$ für $x \in \mathbb{R}$, $I_x := \{(x,y) : 0 < y < 2\}$ und $I'_x := \{(x+y,y) : 0 < y < 2\}$.

(iv) $U_a^n := \{a\} \cup \{(x,y) : x > n, y \geq 0\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{U\backslash E : U \text{ vom Typ (i),(ii),(iii) oder (iv)}, E \subset \mathbb{H}_+ \text{ endlich}\}$$

Basis einer Topologie T auf X ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass der in Aufgabe 3 konstruierte topologische Raum (X,T) ein T_3-Raum ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 26.1.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.