Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 11

Aufgabe 1. Sei (X, T) ein topologischer Raum und $N \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge. Zeigen Sie

(1) $\overset{\circ}{N}$ ist die größte offene Menge, die in N enthalten ist.

(2) $\overset{\circ}{N} = \{x \in X :$ es existiert $U_x \in T$ mit $x \in U_x$ und $U_x \subset N\}$

(3) N ist genau dann offen, wenn $N = \overset{\circ}{N}$.

(4) $\bar{N}$ ist kleinste abgeschlossene Menge, die N enthält.

(5) $\bar{N} = \{x \in X :$ für alle $U_x \in T$ mit $x \in U_x$ gilt $U_x \cap N \neq \emptyset\}$

(6) N ist genau dann abgeschlossen, wenn $\bar{N} = N$.

Aufgabe 2. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum (X, T) heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn gilt: für alle offenen Umgebungen U_x von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $x_n \in U_x$ für alle $n \geq N$. Ein topologischer Raum (X, T) heißt *hausdorffsch*, wenn für alle Punkte $x \neq y$ in X eine offene Umgebung U_x von x und eine offene Umgebung U_y von y existiert mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Zeigen Sie: in einem hausdorffschen Raum (X, T) ist der Limes einer konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig.

Aufgabe 3. Eine Abbildung $f : (X, T) \to (Y, \tilde{T})$ zwischen topologischen Räumen heißt *folgenstetig*, wenn gilt: konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen $x \in X$, so konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Zeigen Sie:

a) Ist f stetig, so ist f auch folgenstetig. Die Umkehrung gilt nicht.

b) Erfüllt (X, T) das erste Abzählbarkeitsaxiom, so sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent.

Aufgabe 4. Sei (X, T) topologischer Raum und N eine nicht-leere Teilmenge von X, die offen, abgeschlossen und zusammenhängend ist. Zeigen Sie: Ist $\tilde{N}$ eine zusammenhängende Teilmenge von X mit $N \subset \tilde{N}$, so gilt $N = \tilde{N}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 19.1.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.