Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 10

Aufgabe 1. (*Die Greensche Formel*) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $K \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $N : \partial K \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen und $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Zeigen Sie:

$$\int_K (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \, d\lambda^n = \int_{\partial K} (f \cdot \langle \nabla g, N \rangle - g \cdot \langle \nabla f, N \rangle) \, dS$$

Aufgabe 2. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, das den Nullpunkt in seinem Innern enthält. Für $x \in \partial K$ bezeichne $\alpha(x)$ den Winkel zwischen dem Ortsvektor x und dem äußeren Einheitsnormalenvektor $N(x)$ von K im Punkt x. Zeigen Sie

$$\int_{\partial K} \frac{\cos \alpha(x)}{||x||^{n-1}} \, dS(x) = n \cdot \omega_n \, .$$

Hinweis: Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld $F(x) := \frac{x}{||x||^n}$ und die Menge $K_\epsilon := \{x \in K : ||x|| \geq \epsilon\}$ für genügend kleines ϵ an.

Aufgabe 3. Eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von nicht-leeren Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, falls gilt: für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A_k \subset B_\epsilon(x)$ für alle $k \geq N$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene, $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen den Punkt $x \in U$ konvergente Folge von kompakten Teilmengen $A_k \subset U$ mit glattem Rand. Zeigen Sie:

$$\operatorname{div} X(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\operatorname{Vol}(A_k)} \int_{\partial A_k} \langle X, N \rangle \, dS$$

Aufgabe 4. Sei X eine Menge mit zwei oder drei Elementen. Geben Sie alle Topologien an, die auf X definiert werden können! Untersuchen Sie die entsprechenden topologischen Räume auf Homöomorphie.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 12.1.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.