Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 8

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \leq p \leq q < \infty$. Zeigen Sie: Ist $\mu(X) < \infty$, so gilt

$$L^q(X) \subset L^p(X)$$

Aufgabe 2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in V. Dann ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann vollständig, wenn für alle $v \in V$ folgendes gilt: Ist $\langle v, v_n \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $v = 0$.

Aufgabe 3. (*Partielle Integration*) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ λ^1-integrierbar. Für $x \in [a, b]$ sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,,\; G(x) := \int_a^x g(t)\,dt$$

Dann gilt:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini auf $(x, y) \mapsto f(y)g(x)\chi_E(x, y)$ an mit $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 : y < x\}$.

Aufgabe 4. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar mit $\int_a^x f(t)dt = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist $f = 0$ λ^1-fast überall.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 15.12.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.