Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 7

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Meßraum, $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}$ und μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $(X, \mathscr{A})$. Es existiere in $\mathscr{E}$ eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ und $\mu_1(E_n), \mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $A, B \in \mathscr{E}$ gelte ferner $A \setminus B = \bigcup A_i$ für paarweise disjunkte Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathscr{E}$. Zeigen Sie: gilt $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$, so folgt $\mu_1 \leq \mu_2$.

Aufgabe 2. Sei $D := \{\frac{i}{2^k} : i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}$. Betrachten Sie folgendes System von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

$$\mathscr{E} := \{[v, w[: v_i, w_i \in D, i = 1, ..., n\}\,.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I \in \mathscr{E}$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Figuren $F_k \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$ existiert mit $\overline{F_k} \subset I$ und $F_k \uparrow U \cap I$.

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \geq 1$. Zeigen Sie:

a) Die Menge $L^p(X) := \mathscr{L}^p(X)/\mathscr{N}^p(X) := \{f + \mathscr{N}^p(X) : f \in \mathscr{L}^p(X)\}$ ist ein reeller Vektorraum, wenn man Addition und Skalarmultiplikation wie folgt definiert: $(f+\mathscr{N}^p(X))+(g+\mathscr{N}^p(X)) := (f+g)+\mathscr{N}^p(X)$, $\lambda \cdot (f + \mathscr{N}^p(X)) := \lambda \cdot f + \mathscr{N}^p(X)$.

b) Die Abbildung $|| \cdot ||_p : L^p(X) \to \mathbb{R}\,;\, f + \mathscr{N}^p(X) \mapsto \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ ist eine Norm auf $L^p(X)$.

Aufgabe 4. Für $t > 0$ betrachten Sie die Integrale

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos(x^2)\, dx \quad , \quad G(t) := \int_0^\infty e^{-tx^2} \sin(x^2)\, dx$$

Beweisen Sie:

a) $F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{t}{t^2+1}$

b) $2F(t)G(t) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+t^2}$

c) Es gilt $G(t) > 0$. Bestimmen Sie $F(t)$ und $G(t)$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 8.12.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.