Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R} \;\; ; s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

stetig ist.
Hinweis. Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ definiert sei vermittels $\mu(A) := \#A$. Dies ist das sogenannte Zählmaß. Integrieren Sie für ein festes $s > 1$ die Funktion $f_s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\, ;\, n \mapsto n^{-s}$ bezüglich μ.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Gamma-Funktion

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}\, ;\, x \mapsto \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

a) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ die Funktion $t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ über $(0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar ist.

b) Berechnen Sie die Ableitungen $\Gamma^{(n)}$.

c) Leiten Sie die *Gaußsche Darstellung* der Γ-Funktion her:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}$$

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die vermittels

$$F(x) := \Big(\int_0^x e^{-t^2} dt \Big)^2 \quad , \quad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$$

definierten Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und dass gilt $F' + G' = 0$ und $F + G = \frac{\pi}{4}$. Folgern Sie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

b) Weisen Sie folgende Identität nach (*Wallissches Produkt*):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot n!}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2}+n)} = \sqrt{\pi}$$

Hinweis. Benutzen Sie Aufgabe 2c).

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t^y} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+ny}$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 24.11.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.