Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 3

Aufgabe 1. Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring in X und $\mathscr{A}(\mathscr{R})$ die von $\mathscr{R}$ in X erzeugte σ-Algebra. Für einen Inhalt $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bezeichne μ^* das (wie in Satz 3.6 definierte) zu μ assoziierte äußere Maß. Zeigen Sie:

a) Sei $B \subset X$ mit $\mu^*(B) < \infty$ gegeben. Dann existiert $A \subset \mathscr{A}(\mathscr{R})$ mit $B \subset A$ und $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

b) Gegeben seien $M, N \subset X$ und μ^*-meßbare Mengen $A, B \subset X$ mit $M \subset A$ und $N \subset B$. Ist $\mu^*(A \cap B) = 0$, so folgt $\mu^*(M \cup N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$.

Aufgabe 2. Sei $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ in X. In $\mathscr{E}$ existiere eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $E_n \uparrow X$. Gegeben seien nun zwei Maße μ_1 und μ_2 auf $\mathscr{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$.

(ii) $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie $\mu_1 = \mu_2$.
Hinweise: 1.) Zeigen Sie für $E \in \mathscr{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$, dass

$$\mathscr{D}_E := \{D \in \mathscr{A} : \mu_1(D \cap E) = \mu_2(D \cap E)\}$$

ein $\cap$-stabiles Dynkin-System ist mit $\mathscr{D}_E = \mathscr{A}$.
2.) Definieren Sie nun induktiv eine Mengenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vermittels

$$F_n := E_n \backslash (E_1 \cup ... \cup E_{n-1})$$

und zeigen Sie

$$\mu_1(F_n \cap A) = \mu_2(F_n \cap A)\,.$$

Aufgabe 3. Es bezeichne λ das Lebesgue-Borel Maß auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass für $T \in GL(\mathbb{R}, d)$ gilt

$$T(\lambda) = \frac{1}{|det(T)|} \cdot \lambda \,.$$

Hinweis: 1.) Zeigen Sie, dass das Maß $T(\lambda)$ auf $\mathscr{B}^d$ translationsinvariant ist. 2.) Betrachten Sie die Abbildung $\Phi : GL(\mathbb{R}, d) \to \mathbb{R}\,;\; T \mapsto \Phi(T)$, definiert vermittels $T(\lambda)(W) = \Phi(T) \cdot \lambda(W)$, wobei $W \subset \mathbb{R}^d$ den Einheitswürfel bezeichnet. Zeigen Sie

$$\Phi(S \cdot T) = \Phi(S) \cdot \Phi(T)\,.$$

3.) Verwenden Sie nun (ohne Beweis) folgende Aussage aus der linearen Algebra: Ist $\Phi : GL(\mathbb{R}, d) \to \mathbb{R}^* \backslash \{0\}$ Gruppenhomomorphismus, so existiert ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \mathbb{R}^* \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^* \backslash \{0\}$ mit $\Phi = \alpha(\det)$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ folgendes Mengensystem: eine Menge $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt offen, falls gilt: 1.) $\mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$. 2.) Ist $\infty \in \mathcal{O}$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \infty] \subset \mathcal{O}$. 3.) Ist $-\infty \in \mathcal{O}$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $[-\infty, \alpha) \subset \mathcal{O}$. Zeigen Sie:

a) Die offenen Teilmengen in $\overline{\mathbb{R}}$ ergeben eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$, welche auf $\mathbb{R}$ die gewöhnliche Topologie induziert.

b) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gilt: $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|x - x_n| < \epsilon$.

c) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gilt: ∞ ist Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $x_n > \alpha$.

d) Wir definieren $\limsup x_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m$. Zeigen Sie: $\limsup x_n$ ist Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ weiterer Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $\bar{x} \leq \limsup x_n$.

Erinnerung: In einem topologischen Raum X heißt ein Punkt x *Häufungspunkt* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder offenen Umgebung $U \subset X$ von x unendlich viele Elemente der Folge (x_n) liegen.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 10.11.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.