Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 2

Aufgabe 1. (*Poisson-Verteilung*)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mu_t : \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,;\ A \mapsto (e^{-t} \sum_{n\in A} \frac{t^n}{n!})$$

für $t \geq 0$ ein Maß ist.

b) Berechnen Sie $\mu_t(\{2n : n \in \mathbb{N}_0\})$.

Aufgabe 2. Sei $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System in X. Seien $D, E \in \mathscr{D}$ und $E \subset D$. Dann gilt:

$$D \backslash E \in \mathscr{D}$$

Das heißt, $\mathscr{D}$ ist abgeschlossen unter *eigentlicher Komplementbildung*.

Aufgabe 3. Sei $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System in X. Zeigen Sie: $\mathscr{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\mathscr{D}$ $\cap$-stabil ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiles System von Mengen in X. Zeigen Sie: das von $\mathscr{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ stimmt mit der von $\mathscr{E}$ erzeugten σ-Algebra $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ überein.
Hinweis: zeigen Sie, dass $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ $\cap$-stabil ist, indem sie für $D \in \mathscr{D}$ nachweisen, dass

$$\mathscr{D}_D := \{D' \in \mathfrak{P}(X) : D' \cap D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})\}$$

ein Dynkin-System ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 3.11.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.