Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röhr

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 1

Aufgabe 1. Sei X eine Menge. Zeigen Sie:

a) Das Mengensystem $\mathscr{A} := \{A \subset X : \ A \text{ abzählbar oder } \complement A \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra.

b) Die Abbildung

$$\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \ \cup \{+\infty\}\,;\, A \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{wenn } \complement A \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ist ein Maß, falls X überabzählbar ist.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Zeigen Sie:

a) Das Mengensystem $\mathscr{R} := \{A \subset X : \ A \text{ endlich oder } \complement A \text{ endlich}\}$ ist ein Ring, aber keine σ-Algebra.

b) Die Abbildung

$$\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R} \ \cup \{+\infty\}\,;\, A \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{wenn } \complement A \text{ endlich} \end{cases}$$

ist ein Inhalt, aber kein Prämaß, falls X abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathscr{R}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathscr{R}$. Dann ist μ sub-additiv, d.h. es gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

b) Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathscr{R}$ und $A_0, A_1, ... \in \mathscr{R}$. Dann gilt:

$$A_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$, μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathscr{R}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathscr{R}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \quad &= \quad \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \mu(A_1 \cap \cdots \cap A_n)\,. \end{aligned}$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 27.10.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.