Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
\cos(2z) &= \cos^2(z) - \sin^2(z) \\
4\sin^3(z) &= 3\sin(z) - \sin(3z) \\
\cos(z) - \cos(w) &= -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \\
\sin(z) - \sin(w) &= 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a.) Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \\
\sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)
\end{aligned}$$

b.) Skizzieren Sie sinh, cosh, tanh im Reellen. Zeigen Sie das streng monotone Wachstum dieser Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ (im Falle von sinh und tanh) bzw. auf $[0, \infty)$ (für cosh). Bestimmen Sie jeweils das Verhalten im Unendlichen.

Aufgabe 3. Es bezeichne $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die eindimensionale Sphäre vom Radius 1. Wir definieren die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ durch $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. Zeigen Sie:

- Die Einheitssphäre versehen mit der Einschränkung der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ ist eine abelsche Gruppe.
- Die Abbildung φ ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{S}^1, \cdot)$.
- Man bestimme den Kern $\ker\varphi := \varphi^{-1}(1)$ der Abbildung φ.
- Die Abbildung $\psi = \varphi|_{[0,1)} : [0,1) \to \mathbb{S}^1$ ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung ψ^{-1} ist jedoch nicht stetig.

Aufgabe 4. Skizzieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^3}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass sie beliebig oft differenzierbar ist.

Zusatzaufgabe 5. Berechnen Sie

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \ , \ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) , \ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) , \ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Hinweis: Im Falle von $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *überlege man sich, dass für eine fünfte Einheitswurzel* ξ *die Identität* $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0$ *gilt. Setzen Sie nun* $w := \xi + \frac{1}{\xi}$.

Zusatzaufgabe 6. Sei $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für $t_0 \in (0,1]$ der Grenzwert

$$s'_+(t_0) := \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{s(t_0) - s(t)}{t_0 - t}$$

existiert. Zeigen Sie: Gilt $s(0) = 0$ und $s'_+(t_0) \leq 0$ für alle $t_0 \in (0,1]$, so folgt $s \leq 0$.

Zusatzaufgabe 7. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ für $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ konvergiert.

Zusatzaufgabe 8. Wir betrachten abermals den Homomorphismus φ aus Aufgabe 3. Seien $x \in [0,1)$, $\mathbb{Z}x := \{k \cdot x \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{S}^1_x := \varphi(\mathbb{Z}x)$. Zeigen Sie:

a.) Ist $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, so ist $\mathbb{S}^1_x$ endlich.

b.) Ist $x \in [0,1) \setminus \mathbb{Q}$, so liegt $\mathbb{S}^1_x$ dicht in $\mathbb{S}^1$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 7.1.2007, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude. Sie können auf diesem Blatt 32 Punkte erreichen, wovon 16 als Bonuspunkte gewertet werden.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2008!