Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 8

Aufgabe 1. Sei I ein Intervall. Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.

Aufgabe 2.

a.) Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, dass also ein $x_0 \in [0,1]$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

b.) Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, so dass $f(x_0) = f(x_0 + 1)$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $D \subset \mathbb{C}$ nicht-leer und $A \subset D$. Beweisen Sie, dass A genau dann abgeschlossen (in D) ist, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A – d.h. $a_n \in A$ für $n \in \mathbb{N}$ – mit Grenzwert $a \in D$ auch a in A liegt.

Aufgabe 4. Es bezeichne C das Cantorsche Diskontinuum. Zeigen Sie:

a.) Die Menge C besteht genau aus den reellen Zahlen a der Form $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ mit $a_k \in \{0,2\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

b.) Die Menge C ist überabzählbar.

Weihnachtspreisaufgabe. Konstruieren Sie den Körper der reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 10.12.2007, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude. Abgabe der Lösung zur Weihnachtspreisaufgabe am Freitag, den 14.12.2007, in der Vorlesung.