Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 5

Aufgabe 1.

a.) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie: Ist $|z| > 1$ so strebt die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich, d.h. die Folge der Beträge ist unbeschränkt. Ist $|z| < 1$ so konvergiert die Folge gegen 0.

b.) Bestimmen Sie den Grenzwert der durch

$$a_n := \frac{(3+3i)^{n+1} + 4^n}{4(3+3i)^n + 7}$$

für $n \in \mathbb{N}$ definierten komplexen Folge.

Aufgabe 2. Sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl und $r \in \mathbb{R}$ reell. Zeigen Sie, dass für eine rationale Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $q_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) mit $\lim_{n\to\infty} q_n = r \in \mathbb{R}$ die Folge der Potenzen $(a^{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie ferner, dass dieser Grenzwert nicht von der Wahl der rationalen Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt, insgesamt also, dass die Potenz $a^r := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ (insbesondere für Exponenten aus $\mathbb{R}$) wohldefiniert ist.

Hinweis:

- *Zeigen Sie* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *(Tipp: Setzen Sie hierzu* $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ *und betrachten Sie* $n = (1+h_n)^n$.*)*
- *Sei* $a > 0$. *Folgern Sie, dass* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *gilt. (Tipp: Sandwich-Theorem)*
- *Sei* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge rationaler Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. *Zeigen Sie, dass* $\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = 1$.
- *Zeigen Sie, dass für eine monoton fallende, rationale Folge* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} q_n = r$ *(Existenz?!) auch* $(a^{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*
- *Zu zeigen bleibt die Wohldefiniertheit von* a^r.

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und sei H die Menge ihrer Häufungspunkte. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H \qquad\qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H$$

Aufgabe 4.

a.) Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $r(n) \in \mathbb{N}_0$ die kleinste Zahl, so dass $n - r(n)$ durch 4 teilbar ist. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der für $n \in \mathbb{N}$ durch $a_n := r(n)$ definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b.) Wir definieren nun $r'(n) \in \mathbb{N}_0$ ganz analog als die kleinste Zahl, so dass $n - r'(n)$ durch $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ teilbar ist. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der für $n \in \mathbb{N}$ durch $b_n := r'(n)$ definierten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(Für $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ setze dabei $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq x\}$)

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 19.11.2007, um 16.00 Uhr**, *in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.*