Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 4

Aufgabe 1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^n \leq a\}$$

nach oben beschränkt ist. Beweisen Sie weiter, dass die Zahl

$$\sqrt[n]{a} := \sup A$$

diejenige *eindeutig bestimme, positive* reelle Zahl ist, deren n-te Potenz mit a übereinstimmt, also dass

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n = a\} = \{\sqrt[n]{a}\}$$

Aufgabe 2. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Wir schreiben $z < w$, falls entweder $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Re}(w)$ oder $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(w)$ gilt. Indem wir $z \leq w$ setzen, falls $z = w$ oder $z < w$ ist, erhalten wir eine Relation auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass „$\leq$" eine Ordnung auf $\mathbb{C}$ ist, welche dem Ordnungsaxiom $(O1)$ genügt.

Aufgabe 3. Seien $b, c \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die quadratische Gleichung

$$z^2 + bz + c = 0$$

eine Lösung besitzt.

Aufgabe 4. Gegeben sei die induktiv definierte Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_1 := 3$ und

$$q_{n+1} := \frac{1}{2}\left(q_n + \frac{3}{q_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge rationaler Zahlen ist, die in $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ nicht konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie induktiv erst $q_n > 0$, *damit dann* $q_n \geq \sqrt{3}$ *und schließlich* $q_{n+1}/q_n \leq 1$. *Folgern Sie, dass* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge reeller Zahlen ist.*

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Dienstag, den 13.11.2007, um 8.15 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.