Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 3

Aufgabe 1. Seien natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie induktiv, dass $(kn)!$ durch $(k!)^n$ teilbar ist.

Aufgabe 2. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und nicht-leere Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$
$$\lambda X := \{\lambda x \mid x \in X\}$$

Seien X, Y zusätzlich nach oben beschränkt und sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $\sup(X+Y)$ und $\sup(\lambda X)$ existieren und die Identitäten

$$\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$$
$$\sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$$

erfüllen. Beweisen Sie weiter, dass jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen ein Infimum besitzt, indem Sie dieses konkret zu

$$\inf(Z) = -\sup(-Z)$$

bestimmen.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie – so vorhanden – Maximum, Minimum, Supremum und Infimum von M und begründen Sie Ihre Angaben.

Aufgabe 4. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen Mengen M und N. Zeigen Sie:

$$f \text{ injektiv} \iff \forall\, x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
$$f \text{ surjektiv} \iff \forall\, y \in N\, \exists\, x \in M : f(x) = y$$
$$f \text{ bijektiv} \iff \forall\, y \in N\, \exists!\, x \in M : f(x) = y$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Dienstag, den 6.11.2007, um 8.15 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude. Sie finden diese Übung auf der Seite http://wwwmath1.uni-muenster.de/reine/u/cboehm/WS07/analysis.html