Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 2

Aufgabe 1. Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ die folgenden *Bruchrechenregeln*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ist außerdem $c \neq 0$, so gilt auch

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie für natürliche Zahlen $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Folgern Sie daraus induktiv, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ keine *rationale* Zahl ist, indem Sie das Gegenteil annehmen und dies unter unkommentierter Verwendung der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktordarstellung in $\mathbb{Z}$ zu einem Widerspruch führen.
Zeigen Sie nun, dass

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

mit der eingeschränkten Addition und Multiplikation ein *Zwischenkörper* $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subsetneq \mathbb{R}$ ist. Das heißt, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein echter Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\mathbb{Q}$ echt enthält.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass es für den zweiten Teil ausreicht, folgendes zu zeigen:

- *Die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist additiv und multiplikativ abgeschlossen.*

- *Zu Elementen aus* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *sind additive und multiplikative(!) Inverse wieder in* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *enthalten.*
- *Die Mengeninklusionen* $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\subseteq\mathbb{R}$ *sind strikt.*

Aufgabe 4. Und Eiseskälte legt sich übers Land, als das todbringende Verderben in einer von den Göttern vergessenen Nacht einen entlegenen tibetanischen Schweigeorden heimsucht. Im Traum erscheint den Mönchen das schon von den Alten prophezeite, drohende Unheil, wie es mit roter rechter Hand sein verhängnisvolles Zeichen in Form eines Punktes auf den Hinterkopf derjenigen unter ihnen setzt, die der Verdammnis anheim fallen sollen und wahrlich, deren wird es gar einige geben.

Am darauffolgenden Morgen befiehlt jedem der Eremiten sogleich sein strikter, allen gemeiner Verhaltenskodex, die Glaubensgemeinschaft nicht weiter durch seine fortdauernde Anwesenheit zu gefährden, sollte sein Schicksal auf solch schreckliche Weise besiegelt sein. Jedoch kann er das Kloster nicht ohne die absolute Sicherheit drohender Verdammnis verlassen, um nicht unnötig das Fortbestehen der Gemeinschaft aufs Spiel zu setzen.

Nur mit dem Nötigsten ausgestattet, sind die Mönche gezwungen, die Schlussfolgerungen über ihr eigenes Schicksal aus der scharfen Beobachtung der Hinterköpfe ihrer Glaubensbrüder zu ziehen. Ein in Meditation und Gebet über die Jahre trainierter Geist verhilft ihnen dabei zur bestmöglichen Entscheidung über Gehen oder Bleiben. Und so harren sie jedes neuen Morgens, ob die Logik es einem der ihren befehligt habe, sich im Schutze der vergangenen Nacht, mit dem Anbruch des neuen Tages in eine unheimliche Zukunft zu verabschieden. Doch so gebärt jeder Morgen ohne Weggang nicht den süßen Schimmer verlorengeglaubter Hoffnung, sondern, gar dem entgegen, die Vorahnung düsterer Gewissheit...

Vor 667 Tagen suchte sie das Grauen heim. Am Fuße der Berge der Ahnen verfällt eine seit heute verlassene Abtei. Wie viele Mönche sie zur Stunde Null beherbergte, möchten Sie wissen. Das können nur die Götter in ihrer unergründlichen Weisheit erahnen!?

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Dienstag, den 30.10.2007, um 8.15 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude. Sie finden diese Übung auf der Seite http://wwwmath1.uni-muenster.de/reine/u/cboehm/WS07/analysis.html