Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 9

32. (*Schnittkrümmung*) Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, $p \in M$ und Σ_p zwei-dimensionaler Unterraum von T_pM^n. Sei ferner (e_1, e_2) eine Orthonormalbasis von Σ_p. Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung
$$K(\Sigma_p) := g(R_{e_1,e_2}e_2, e_1)$$
der Ebene Σ_p wohldefiniert ist (d.h. nicht von der Wahl der Orthonormalbasis (e_1, e_2) abhängt).

33. (*Rotationsflächen*) Für eine nach Bogenlänge parametrisierte differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $u \mapsto (a(u), b(u))$ mit $a > 0$ betrachte man die Immersion
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ (u, \varphi) \mapsto (a(u) \cdot \cos(\varphi), a(u) \cdot \sin(\varphi), b(u)) .$$
Berechnen Sie für die zurückgeholte Metrik $g := F^*g_0$ auf $\mathbb{R}^2$, g_0 Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$, die Schnittkrümmung.

34. Berechnen Sie die Schnittkrümmung der hyperbolischen Ebene.

35. (*Punktkurven*) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist $p \in M$ und c Punktkurve, d. h. $c(t) \equiv p$, so gilt für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}_c(M)$ längs c die Identität $\frac{DX}{dt} = X'$, wobei X' die gewöhnliche Ableitung im Vektorraum T_pM bezeichnet.

36. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $V \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\alpha : V \to M$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass die längs differenzierbarer Kurven definierte kovariante Ableitung $\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}_c(M) \to \mathfrak{X}_c(M)$ torsionsfrei ist, d.h. dass
$$\frac{D}{dt}\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{D}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$
gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 15.12.2004, 11:15.